МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)
Государственное автономное учреждение дополнительного профессионального образования
Республики Саха (Якутия)
«Институт развития профессионального образования»
ГБПОУ «Колледж цифровых технологий «АЙТЫЫН»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

учебной дисциплины

«ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»

для укрупненной группы специальностей
09.00.00 «Информатика и вычислительная техника»
Форма обучения: очная / заочная

Якутск
2026

У91

Учебно-методический комплекс учебной дисциплины «Элементы высшей математики»: для укрупненной группы специальностей 09.00.00 «Информатика и вычислительная техника»: форма обучения: очная / заочная / Министерство образования и науки Республики саха (Якутия), Институт развития профессионального образования, Колледж цифровых технологий «АЙТЫЫН»; составитель М.И. Адамова. – Якутск: АЙТЫЫН, 2026 г. – 138 с.

Агенство CIP НБР Саха

УДК 511(075.8)
ББК 22.13я73

Рецензент: доцент Педагогического института ФГАОУ ВО «СВФУ им. М.К. Аммосова», кандидат педагогических наук М.И. Дедюкина

Утверждено на заседании Научно-методического совета Государственного автономного учреждения дополнительного профессионального образования Республики Саха (Якутия) «Институт развития профессионального образования» 10 февраля 2026 года протокол №1

УМК дисциплины «Элементы высшей математики» предназначен для реализации основной профессиональной образовательной программы по укрупненной группе специальностей 09.00.00 «Информатика и вычислительная техника». Содержит систематизированный материал, направленный на формирование у обучающихся общих (ОК) и профессиональных компетенций в области применения математического аппарата для решения прикладных задач. Комплекс включает контрольно-оценочные средства, методические рекомендации для преподавателей и обучающихся, а также пакет учебных заданий для текущего, промежуточного и итогового контроля.

Предназначен для преподавателей математических дисциплин, методистов, обучающихся, а также может быть использован для организации самостоятельной работы и подготовки к аттестации.

Содержание

1.	Пояснительная записка …….	4
2.	Нормативная-правовая основа ……..	6
3.	Сокращения, термины и определения ……	7
4.	Паспорт комплекта контрольно-оценочных средств……..	8
5.	Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке …….	9
6.	Оценка освоения учебной дисциплины ……...	11
6.1.	Формы и методы оценивания ……..	11
6.2.	Типовые задания для оценки освоения учебной дисциплины..	12
6.2.1.	Типовые задания для оценки знаний……..	12
6.2.2.	Типовые задания для оценки знаний для промежуточной аттестации …….	17
7.	Задания для оценки освоения дисциплины ……	24
8.	Контрольно-оценочные материалы для итоговй аттестации по учебной дисциплине ……	133
9.	Список использованной литературы……	137

1. Пояснительная записка

Настоящий учебно-методический комплекс по дисциплине «Элементы высшей математики» предназначен для реализации требований ФГОС СПО по укрупненной группе специальностей 09.00.00 «Информатика и вычислительная техника» и представляет собой комплект нормативных, методических и оценочных материалов, обеспечивающих достижение планируемых результатов обучения.

Основные цели УМК:

- обеспечение методического единства в преподавании дисциплины;

- формирование единой системы оценивания результатов освоения дисциплины;

- обеспечение качества образовательного процесса через чёткое определение содержания, форм и методов контроля;

- повышение эффективности самостоятельной работы обучающихся.

УМК включает в себя следующие основные компоненты: паспорт КОС (контрольно-оценочных средств), определяющий умения, знания и компетенции, подлежащие оценке; результаты освоения дисциплины, подлежащие проверке. Детализирует индикаторы достижения и формы контроля по каждому элементу; систему оценки освоения дисциплины. Типовые задания и КОМ (контрольно-оценочные материалы), содержащие образцы тестов, практических и самостоятельных работ, вопросы и задачи для дифференцированного зачета (экзамена), включая критерии оценки и эталоны ответов.

В приложении отражены полные комплекты практических и самостоятельных работ по всем разделам дисциплины («Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Введение в анализ»).

Дисциплина «Элементы высшей математики» относится к общепрофессиональному циклу и формирует базовый математический аппарат,

необходимый для освоения специальных дисциплин и будущей профессиональной деятельности специалиста по компьютерным системам.

В результате освоения дисциплины у обучающихся формируются:

Умения (У): выполнять операции над матрицами, решать системы линейных уравнений, применять методы дифференциального и интегрального исчисления, решать дифференциальные уравнения.

Знания (З): основы математического анализа, линейной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления.

Общие компетенции (ОК) включая умение организовывать собственную деятельность, решать проблемы, использовать ИКТ, работать в команде и другие.

Оценка освоения дисциплины осуществляется в форме дифференцированного зачета (экзамена). Текущий контроль включает устные опросы, практические и самостоятельные работы, тестирование. Формы и методы контроля детализированы в соответствующих таблицах и приложениях УМК. Критерии оценки по каждому виду работ и для итоговой аттестации четко прописаны.

Материалы комплекса рекомендуется использовать преподавателям для планирования занятий, разработки конкретных вариантов заданий, проведения всех видов контроля. Обучающимся для самоподготовки, самоконтроля и углубленного изучения тем дисциплины. Методистам и администрации для проведения внутреннего мониторинга качества образования.

УМК подлежит актуализации при изменении нормативной базы или образовательной программы.

2. Нормативная правовая основа

1. Федеральный Закон от 29.12.12 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».

2. Закон Республики Саха (Якутия) от 15 декабря 2014 г. 1401-З N 359-V «Об образовании в Республике Саха (Якутия)».

3. Приказ Министерства просвещения РФ от 24.08.2022 № 762 «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам среднего профессионального образования».

4. Приказ Минпросвещения России от 25.05.2022 N 362 (ред. от 03.07.2024) "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы" (Зарегистрировано в Минюсте России 28.06.2022 N 69046).

5. Устав Государственного бюджетного профессионального образовательного учреждения Республики Саха (Якутия) «Колледж цифровых технологий «АЙТЫЫН»» от 19 октября 2023 года № 01-03/2435.

3. Сокращения, термины и определения

УМК — учебно-методический комплекс;

ФГОС СПО — федеральный государственный образовательный стандарт среднего профессионального образования;

КОС — контрольно-оценочные средства;

КОМ — контрольно-оценочные материалы;

ОК — общие компетенции;

У — умения (в контексте планируемых результатов освоения дисциплины);

З — знания (в контексте планируемых результатов освоения дисциплины);

СПО — среднее профессиональное образование;

ГБПОУ — государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение;

КЦТ — колледж цифровых технологий;

НМС — научно-методический совет;

ИРПО — институт развития профессионального образования;

ИКТ — информационно-коммуникационные технологии.

4. Паспорт комплекта контрольно-оценочных средств

В результате освоения учебной дисциплины *Элементы высшей математики* обучающийся должен обладать предусмотренными ФГОС по укрупненной группе специальностей 09.00.00 «Информатика и вычислительная техника» следующими умениями, знаниями, которые формируют профессиональную компетенцию, и общими компетенциями:

Основные *умения*:

Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений.

Применять методы математического анализа (производные, интегралы) для исследования функций.

Использовать методы теории вероятностей и математической статистики для обработки данных.

Основные *знания*:

Основы линейной алгебры, векторной алгебры и аналитической геометрии.

Основы математического анализа (пределы, непрерывность, дифференциальное и интегральное исчисление).

Основы теории вероятностей и элементы математической статистики.

Формируемые *компетенции*:

Общие (ОК): Понимание сущности своей будущей профессии, способность организовывать собственную деятельность, принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях, использовать ИКТ.

Профессиональные (ПК): Способность использовать математический аппарат для моделирования процессов, обработки результатов экспериментов и решения профессиональных задач, связанных с функционированием компьютерных систем.

Контроль осуществляется через входную диагностику, текущий контроль (практические работы, тесты) и промежуточную аттестацию (экзамен/дифференциальный зачет).

5. Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке

В результате аттестации по учебной дисциплине осуществляется комплексная проверка следующих умений и знаний, а также динамика формирования общих компетенций:

Таблица 1

Результаты обучения: умения, знания и общие компетенции	**Показатели оценки результата**	**Форма контроля и оценивания**
Уметь:		
У 1 - выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество. ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития. ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.	- выполнение действий над матрицами: сложение, вычитание, умножение, умножение матрицы на число -вычисление определителей - решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы - решение систем линейных уравнений по формулам Крамера - решение систем линейных уравнений методом Гаусса	Устный опрос Самостоятельные работы; практические работы контрольные работы;
У 2 - применять методы дифференциального и интегрального исчисления, а также вычислять пределы и производные функции; ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество. ОК 3. Решать проблемы, оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.	- Выполнение действий над векторами: сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число - Нахождение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов - Составление уравнений прямых и кривых 2 порядка, их построение -Вычисление предела функции в точке и в бесконечности	Устный опрос Самостоятельные работы; практические работы контрольные работы;

	- Исследование функции на непрерывность в точке - Нахождение производной функции - Нахождение производной сложной функции - Вычисление производной неявной функции. Логарифмическое дифференцирование Производная функции, заданной параметрически. - Исследование функции с помощью производной и построение графика - Нахождение неопределенных интегралов -Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен. Интегрирование рациональных функций - Вычисление определенных интегралов -Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла -Исследование сходимости положительных, знакочередующихся рядов	
У 3. Решать дифференциальные уравнения ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество. ОК 6. Работать в коллективе и команде, обеспечивать ее сплочение, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.	-Решение дифференциальных уравнений первого и второго порядка (перечислить виды)	Устный опрос Самостоятельные работы; практические работы контрольные работы;
Знать:		

31 - основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии. ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.. ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество. ОК 3. Решать проблемы, оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях ОК 6. Работать в коллективе и команде, обеспечивать ее сплочение,	- Воспроизводить алгоритмы решения систем линейных уравнений методом обратной матрицы, по формулам Крамера, методом Гаусса - Воспроизводить Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов - Определять уравнения кривых второго порядка	
32 - основы дифференциального и интегрального исчисления. ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития. ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.	- Воспроизводить методы вычисления пределов, замечательные пределы - Классифицировать точки разрыва функции - Воспроизводить правила дифференцирования и производные основных элементарных функций - Воспроизводить алгоритм построения графиков функций с помощью производной - Называть табличные интегралы. Решать интегралы методом замены переменной	

6. Оценка освоения учебной дисциплины

6.1. Формы и методы оценивания

Предметом оценки служат умения и знания, предусмотренные ФГОС по дисциплине ЕН.01 *Элементы высшей математики*, направленные на формирование общих и профессиональных компетенций.

Оценка освоения дисциплины ЕН.01 *Элементы высшей математики* включает текущий контроль успеваемости, итоговую аттестацию в виде дифференциального зачета. Проведение текущего контроля успеваемости осуществляется в форме устных опросов, письменных заданий, практических занятий, контрольных работ. Для этих целей формируются фонды оценочных

средств, включающие типовые задания, контрольные работы, тесты и методы контроля, позволяющие оценить знания, умения и уровень приобретенных компетенций.

Таблица 2

Контроль и оценка освоения учебной дисциплины разделам

Элемент учебной дисциплины	**Формы и методы контроля**			
	Контроль в ходе изучения дисциплины		**Промежуточная аттестация**	
	Форма контроля	**Проверяемые ОК, У, З**	**Форма контроля**	**Проверяемые ОК, У, З**
Раздел 1 Элементы линейной алгебры	***Практические работы 1-5***	***У1, З 1, ОК 4, ОК 5,ОК 2***		***У1, З 1, ОК 4, ОК 5,ОК2***
Раздел 2 Элементы аналитической геометрии	***Устный опрос Практическая работа №6-9 Тестирование Самостоятельные работы***	***У2, З 1 ОК 2, ОК 3,***	**Диф.зачет**	***У2, З 1 ОК 1, ОК 2, ОК 3, ОК 6, ОК 7***
Раздел 3 Введение в анализ	***Устный опрос Практическая работа № 10-15 Самостоятельные работы***	***У3 З2 ОК 2, ОК7 , ОК8***	***Диф.зачет***	***У3 З2 ОК 2, ОК 4, ОК5, ОК7, ОК8***

6.2. Типовые задания для оценки освоения учебной дисциплины

6.2.1. Типовые задания для оценки знаний

1) Задания в тестовой форме (пример)

по разделу «Линейная алгебра»

1. Если матрица $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, то матрица $5A$ имеет вид:

   a) $\begin{pmatrix} 24 & 10 \\ -12 & -30 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 20 & 5 \\ -10 & -15 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} -20 & 5 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$

2. Если матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *и* $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, то матрица $2A+B$ имеет вид:

   a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 9 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -7 \\ 9 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 9 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ указать сумму элементов, расположенных на главной диагонали

   a) 6 *b*) 10 *c*) 8

4. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 7\\ 9 & 2 & 5\\ -3 & 4 & 2\end{pmatrix}$ указать сумму элементов, расположенных на побочной диагонали

$a)$ 6 $b)$ 10 $c)$ 8

5. При умножении матрицы A на матрицу B должно соблюдаться условие:
   a) число строк матрицы A равно числу строк матрицы B
   b) число строк матрицы A равно числу столбцов матрицы B
   c) число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B

6. Квадратная матрица называется *диагональной, если:*
   a) элементы, лежащие на главной диагонали равны нулю
   b) элементы, не лежащие на главной диагонали равны нулю
   a) элементы, лежащие на побочной диагонали равны нулю

7. При каком значении α определитель $\begin{vmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 2\alpha-1\end{vmatrix}$ равен нулю?

$a)2$ $b)12$ $c)-2$

8. Если поменять местами две строки (два столбца) квадратной матрицы, то определитель:
   a) не изменится
   b) станет равным нулю
   c) поменяет знак

9. Чему равен минор M_{21} определителя $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 7 & -1\\ 5 & 4 & 2\end{vmatrix}$?

a) 4 b) 0 c) 11

10. Чему равен минор M_{31} определителя $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 7 & -1\\ 5 & 4 & 2\end{vmatrix}$?

a) 4 b) -2 c) 0

11. Чему равно алгебраическое дополнение A_{21} определителя $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 7 & -1\\ 5 & 4 & 2\end{vmatrix}$?

a) -4 b) 0 c) -11

12. Чему равно алгебраическое дополнение A_{31} определителя $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 7 & -1\\ 5 & 4 & 2\end{vmatrix}$?

a) 4 b) -2 c) 0

13. Чему равен главный определитель системы уравнений $\begin{cases}3x-y=5\\ -2x+y+z=0\\ 2x-y+4z=15\end{cases}$

a) -5 b) 6 c) 5

14. Если матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ и $D=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, то определитель матрицы $A\cdot D$ равен:

a) -32 b) 32 c) -16

15. Найти минор для элемента a_{32} определителя $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

$a) 2 \quad \underline{b) 20} \quad c) -20$

16. Найти алгебраическое дополнение для элемента a_{32} определителя $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

$a) 2 \; b) 20 \; \underline{c) -20}$

17. Найти минор для элемента a_{23} определителя $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$\underline{a) -8} \; b) \; 8 \; c) -5$

18. Найти алгебраическое дополнение для элемента a_{23} определителя $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$a) -8 \; \underline{b) \; 8} \; c) -5$

2) Практическая работа (пример)

Практическая работа № 1
Вычисление определителей второго и третьего порядков

Цель работы: Проверить знание свойств определителей 2 и 3 порядков, правила вычисления определителей, вычислительные навыки.

Теоретический материал

Определение 1. Матрицей размера 2 x 2 называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы из 2 строк и 2 столбцов. Обозначается

Числа, составляющие $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ эту матрицу, называются ее элементами и обозначаются буквой с двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки, а второй - номер столбца, в которых стоит данное число.

Определение 2. *Определителем (или детерминантом) второго порядка,* соответствующим данной матрице, называется число $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Определитель обозначают символом

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

По определению, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называются элементами определителя.

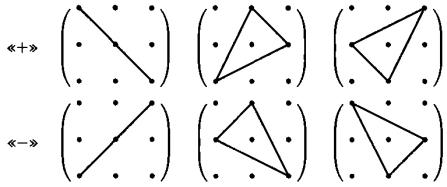
Определение 3. Аналогично, если

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - квадратная матрица размера 3 x 3

(3 строки, 3 столбца), то соответствующим ей определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Правило «треугольников» (правило Саррюса)



Задания

1.Вычислить определители второго порядка: 1) $\Delta = \begin{vmatrix} -\kappa_1 & 2+\kappa_2 \\ \kappa_1 \cdot \kappa_2 & 5 \end{vmatrix}$, 2) $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\kappa_1}{3} & 5^2 \\ 3 \cdot \kappa_2 & 6 \end{vmatrix}$,

3) $\Delta = \begin{vmatrix} 9^{0,5} & \kappa_1 \cdot 64^{\frac{1}{6}} \\ (0,5)^{-3} & \sqrt{4^2} \end{vmatrix}$

2.Вычислить определители третьего порядка:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3\kappa_1 & 2 \\ 2 & 8 & \kappa_2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, 2) $\Delta = \begin{vmatrix} 3\kappa_2 & 4 & -5 \\ 8 & 7\kappa_2 - 2 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$, 3) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & \kappa_1 \cdot \kappa_2 \\ 3 & \kappa_1 & -5 \\ 2 & \kappa_2 & 5 \end{vmatrix}$

3. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} -1 & x \cdot \kappa_1 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \kappa_2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ x & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \kappa_1 & x & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & \kappa_2 \end{vmatrix}$,

Вариант	κ_1	κ_2		***Вариант***	κ_1	κ_2
1	3	-2		***16***	4	-1
2	4	1		***17***	5	1
3	3	-4		***18***	2	0
4	2	1		***19***	-2	1
5	3	-3		***20***	2	-2
6	1	5		***21***	0	7
7	-2	3		***22***	-1	4
8	6	-2		***23***	-3	3
9	-6	1		***24***	-4	1
10	-5	1		***25***	0	8
11	-2	4		***26***	4	-2
12	1	3		***27***	-1	3
13	-3	2		***28***	2	-3
14	-4	-1		***29***	-2	5
15	-1	5		***30***	-5	-1

Ответы

вариант	1 задание			2 задание			вариант	1 задание			2 задание			3
	1	2	3	1	2	3		1	2	3	1	2	3	
1.	-15	6	-180	-84	-220	127	16.	-16	63	-244	-89	-100	109	
2.	-32	-63	-244	-63	-68	55	17.	-40	-65	68	-72	-68	45	

3.	-39	6	-180	-104	2372	261	18.	-10	4	-116	-52	232	60	
4.	-16	-71	-20	-45	-68	63	19.	16	-79	140	-9	-68	59	
5.	-24	-219	-180	-94	1212	185	20.	-10	146	-116	-64	-220	90	
6.	-40	-373	-52	-20	4028	145	21.	0	-925	12	-21	8092	85	
7.	40	-229	140	-19	1308	-23	22.	29	-302	76	-24	2500	9	
8.	-30	162	-372	-138	-220	286	23.	45	231	204	-16	1308	-85	
9.	48	-87	396	27	-68	-65	24.	32	-83	268	9	-68	-9	
10.	40	-85	332	18	-68	-35	25.	0	-600	12	-20	10628	90	
11.	10	-304	140	-24	2500	-68	26.	-20	158	-244	-102	-220	172	
12.	-20	-223	-52	-36	1308	91	27.	20	-227	76	-18	1308	27	
13.	39	156	204	-8	452	-27	28.	14	229	-116	-73	1212	123	
14.	16	63	268	31	-100	45	29.	80	-379	-140	-29	4028	-125	
15.	40	-377	76	-26	4028	-15	30.	30	65	332	46	-100	55	

Решение типового варианта

Вычислить определители.

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4) - (-3)\cdot 5 = -8 + 15 = 7$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(15-12) - 2\cdot(6-9) + (8-15) = 9 + 6 - 7$$

$$= 8$$

Решить уравнения:

1). $x^2 + \begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$x^2 + (2x - 15) = 0$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$x_1 = -5,\ x_2 = 3$

2). $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & x^2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 8\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$

$1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ x^2 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & x^2 \end{vmatrix} + (-20 - 3x) + 8\cdot(14 - 12) = 0$

$6 - x^2 + 2\cdot(2-3) + 2\cdot(x^2 - 9) - 20 - 3x + 8\cdot 2 = 0$

$6 - x^2 - 2 + 2x^2 - 18 - 20 - 3x + 16 = 0$

$x^2 - 3x - 18 = 0$

$x_1 = 6,\ x_2 = -3$

Контрольные вопросы

1. Что называется определителем матрицы?
2. Какие способы вычисления определителя третьего порядка вам известны?
3. Перечислите свойства определителей.

3) Самостоятельная работа (пример)

Вариант 1

Даны векторы $\vec{a}(9;-2;1)$ и $\vec{b}(4;3;0)$ (для № 1-5).

1. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$.*(Ответ: 24)*
2. Найти $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$. Ответ: $\left(\frac{24}{5\sqrt{86}}\right)$
3. Найти $\vec{a}^2$.*(Ответ: 86)*
4. Найти $\left|\vec{b}\right|$.*(Ответ: 5)*
5. Найти координаты векторов $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{f} = -3\vec{a}$.
   (*Ответ*: $c(13;1;1)$, $d(5;-5;1)$, $f(-27;6,0)$)
6. В прямоугольной декартовой системе координат построить точки *A* (0; 0), *B* (3; -4), *C* (-3; 4). Определить расстояние между точками *A* и *B*, *B* и *C*, *A* и *C*. (*Ответ:* $|AB| = 5,\ |BC| = 10, |AC| = 5$)

Вариант 2

Даны векторы $\vec{a}(-3;2;1)$ и $\vec{b}(3;0;4)$ (для № 1-5).

1. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$.*(Ответ:-5)*
2. Найти $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$.(*Ответ:* $-\frac{1}{\sqrt{14}}$)
3. Найти $\vec{a}^2$.*(Ответ: 14)*
4. Найти $\left|\vec{b}\right|$.(*Ответ: 5*)
5. Найти координаты векторов $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{f} = -3\vec{a}$.
   (*Ответ:* $c(0;2;5)$, $d(-6;2;-3)$, $f(9;-6,-3)$)

6. В прямоугольной декартовой системе координат построить точки *A* (0; 0), *C* (-3; 4), *D* (-2; 2) *E* (10; -3). Определить расстояние между точками *C* и *D*, *A* и *D*, *D* и *E*. (*Ответ:* $|CD| = \sqrt{5},\ |AD| = 2\sqrt{2}, |DE| = 13$)

6.2.2. Типовые задания для оценки знаний для промежуточной аттестации

Вопросы к дифференциальному зачету

1. Определители второго и третьего порядка, их вычисление и свойства.
2. Определители n-го порядка, их вычисление.
3. Теорема о разложении определителя по элементам любой строки или столбца.
4. Миноры и алгебраические дополнения.
5. Матрицы, действия над ними.
6. Обратная матрица, алгоритм нахождения.
7. Решение систем линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными при помощи определителей (по формулам Крамера)
8. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
9. Матричный способ решения систем.

10. Векторы, линейные операции над ними.
11. Декартовы прямоугольные координаты в пространстве. Координаты вектора.
12. Скалярное произведение векторов.
13. Векторное произведение векторов.
14. Смешанное произведение векторов.
15. Общее уравнение прямой, его частные случаи.
16. Угловой коэффициент прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой.
17. Уравнение прямой в отрезках.
18. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
19. Уравнение прямой , проходящей через точку в данном направлении (уравнение пучка прямых).
20. Взаимное расположение двух прямых. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.
21. Расстояние от точки до прямой.
22. Угол между прямыми.
23. Окружность, ее уравнения.
24. Эллипс, его уравнение.
25. Гипербола, ее уравнение.
26. Парабола, ее уравнение.
27. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
28. Понятие предела функции.
29. Техника вычисления пределов. Раскрытие неопределенностей.
30. Сравнение бесконечно малых. Принцип замены эквивалентными.
31. Приращение аргумента и приращение функции.
32. Непрерывность и точки разрыва функции.
33. Понятие производной. Правило нахождения.
34. Основные правила дифференцирования. Дифференцирование основных элементарных функций.
35. Дифференцирование сложной функции.
36. Производные высших порядков.
37. Производная неявной функции.
38. Логарифмическое дифференцирование.
39. Геометрические приложения производной.
40. Механические приложения производной.
41. Дифференциал функции
42. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.
43. Промежутки монотонности функции.
44. Экстремумы функции.
45. Наименьшее и наибольшее значения функции.
46. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.
47. Асимптоты. Алгоритм нахождения.
48. Неопределенный интеграл и его свойства.
49. Непосредственное интегрирование.
50. Интегрирование способом подстановки. Алгоритм.
51. Интегрирование по частям.
52. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен.
53. Интегрирование рациональных дробей.
54. Интегрирование тригонометрических функций.
55. Интегрирование простейших иррациональных функций.
56. Определенный интеграл и его свойства.
57. Методы интегрирования определенного интеграла.

58. Приложения определенного интеграла (вычисление площадей плоской фигуры, решение физических задач).
59. Числовые ряды. Основные понятия.
60. Необходимый и достаточные признаки сходимости положительных рядов.
61. Знакочередующиеся ряды. Признак сходимости Лейбница.
62. Степенные ряды.
63. Разложение элементарных функций в степенные ряды.
64. Дифференциальные уравнения. Основные понятия и определения.
65. Уравнения с разделяющимися переменными. Алгоритм решения.
66. Однородные уравнения.
67. Линейные уравнения. Алгоритм решения.
68. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Алгоритм решения.
69. Понятие комплексного числа. Степени мнимой единицы.
70. Алгебраическая форма комплексного числа. Действия в ней.
71. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия в ней.
72. Показательная форма комплексного числа. Действия в ней.
73. Перевод из одной формы комплексного числа в другую.

Задания к дифференциальному зачету

1. Даны вершины треугольника ABC: A (-2, 4), B (3, 1), C (10, 7).
   Найти: а) уравнение стороны AB; б) уравнение высоты CH;
   $Ответ: (AB): 3x+5y-14=0,\ (CH): 5x-3y-29=0$
2. Даны вершины треугольника ABC: A (-2, 4), B (3, 1), C (10, 7).
   Найти: а) уравнение медианы AM; б) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB.
   $Ответ: (AM): y=4,\ (CK): 3x+5y-65=0$
3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку A(3, 1) перпендикулярно к прямой BC, если B(2, 5), C(1, 0).
   $Ответ:\ (l): x-5y+2=0$
4. Доказать, что четырехугольник ABCD - трапеция, если A(3, 6), B(5, 2), C(-1, -3), D(-5,5).
   $Ответ: k_{AB}=k_{CD}=-2 \Rightarrow (AB) \,||\, (CD)$
5. Треугольник задан вершинами A(2; -1), B(-7, 3) и C(-1, -5). Составить уравнение биссектрисы угла C. $Ответ:\ x+1=0$
6. Разложить функцию в ряд Маклорена $а)\ f(x)=\sin\sqrt{x}$; $б)\ f(x)=e^{4x}$;
   $Ответ:\ а) \sin\sqrt{x}=\sqrt{x}-\frac{x\sqrt{x}}{3!}+\frac{x^2\sqrt{x}}{5!}-\frac{x^3\sqrt{x}}{7!}+....+\ \ б) e^{4x}=1+\frac{4x}{1!}+\frac{(4x)^2}{2!}+...+\frac{(4x)^n}{n!}$
7. Исследовать ряд на сходимость по признаку Даламбера:
   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n^2}{5^n}$ $Ответ:\ l=\frac{2}{5}<1-сходится$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$ $Ответ:\ l=0<1-сходится$
   в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n^2}{7^n}$ $Ответ:\ l=\frac{3}{7}<1-сходится$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ $Ответ:\ l=0<1-сходится$
8. Исследовать на сходимость по признаку Даламбера:
   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n}$ $Ответ:\ l=\frac{1}{5}<1-сходится$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$ $Ответ:\ l=0<1-сходится$
9. Исследовать на сходимость по радикальному признаку Коши
   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ $Ответ:\ l=\frac{1}{e}<1-сходится$ $б)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$ $Ответ:\ l=\frac{1}{2}<1-сходится$
10. Найти производную функции

а) $y=\frac{3}{x}+5\sqrt{x^2}-4x^3+\frac{2}{x^4}$, *Ответ:* $y'=-\frac{3}{x^2}+5-12x^2-\frac{8}{x^5}$

б) $y=\sqrt{\arcsin 2x}\cdot 3^{-x}$ *Ответ:* $y'=\frac{3^{-x}}{\sqrt{\left(1-4x^2\right)\cdot\arcsin 2x}}-\sqrt{\arcsin 2x}\cdot 3^{-x}\cdot\ln 3$

в) $y=\sqrt{x^3}+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^5}-5x$, *Ответ:* $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{20}{x^6}-5$

г) $y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\frac{3}{2x^3-3x+1}$ *Ответ:* $y'=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x-3}+\frac{9\left(2x^2-1\right)}{\left(2x^3-3x+1\right)^2}$

д) $y=5x^2-\sqrt[3]{x^4}+\frac{4}{x^3}-\frac{5}{x}$, *Ответ:* $y'=10x-\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}-\frac{12}{x^4}+\frac{5}{x^2}$

е) $y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\frac{5}{(x-1)^4}$ *Ответ:* $y'=\frac{14x-3}{5\sqrt[5]{\left(7x^2-3x+5\right)^4}}+\frac{20}{\left(x-1\right)^5}$

ж) $y=arcctg^2 5x\cdot\ln(x-5)$, *Ответ:* $y'=\frac{10arcctg5x\cdot\ln\left(x-5\right)}{1+25x^2}+\frac{arcctg^2 5x}{x-5}$

з) $y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\frac{4}{(x-2)^5}$ *Ответ:* $y'=\frac{2\left(6x^3+1\right)}{3\sqrt[3]{\left(3x^4+2x-5\right)^2}}-\frac{12}{\left(x-2\right)^4}$

и) $y=\arccos x^2\cdot ctg^3 x$, *Ответ:* $y'=\frac{-4x\cdot ctg^3 x\cdot\arccos x^2}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{3\arccos x^2\cdot ctg^2 x}{\sin^2 x}$

к) $y=4x^6+\frac{5}{x}-\sqrt[3]{x^7}-\frac{7}{x^4}$ *Ответ:* $y'=24x^5-\frac{5}{x^2}-\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}+\frac{28}{x^5}$

11. Найти производную функции, если *а)* $arcctg\, y=4x+5y$, *Ответ:* $y'=-\frac{4\left(1+y^2\right)}{6+5y^2}$

б) $y=x^{tg3x}$ *Ответ:* $y'=\left(\frac{3\ln x}{\cos^2 3x}+\frac{tg3x}{x}\right)\cdot x^{tg3x}$

12. Найти производную функции :

а) $y=(\cos 2x)^{\sin x}$, *Ответ:* $y'=\cos x\cdot\ln\cos 2x-2\sin x\cdot tg2x$

б) $y=\cos(x+y)$ *Ответ:* $y'=-\frac{\sin\left(x+y\right)}{1+\sin\left(x+y\right)}$

13. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ *б)* $y=\frac{x}{9-x}$

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2};0\right]$

Ответ: $y_{\max\left[-\frac{1}{2};0\right]}=y\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{8}{9}$; $y_{\min\left[-\frac{1}{2};0\right]}=y(0)=-1$

15. Записать уравнение касательной и нормали к графику функции $y=x^2-16x+7$ в точке с абсциссой $x_0=1$. *Ответ:* $14x+y-6=0$; $x-14y-113=0$

16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$x-2y+4=0$, $x+y-5=0$, $y=0$ *Ответ:* 13,5 *кв.ед*

17. Даны две матрицы А и В. Найти: а) АВ; б) ВА:А = $\begin{pmatrix}2&1&1\\2&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix}3&6&0\\2&4&-6\\1&-2&3\end{pmatrix}$.

Ответ: *а)* $AB=\begin{pmatrix}9&14&-3\\5&6&9\\4&4&3\end{pmatrix}$ *б)* $BA=\begin{pmatrix}18&-3&9\\6&-2&0\\1&3&2\end{pmatrix}$

18. Даны две матрицы А и В. Найти: а) АВ; б) ВАА = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, В =. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$Ответ: а) AB = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -6 \\ -11 & 15 & -24 \\ 8 & -13 & 14 \end{pmatrix}$ $б) BA = \begin{pmatrix} -10 & 13 & 4 \\ -46 & 48 & 29 \\ 12 & -7 & -11 \end{pmatrix}$

19. Для матриц А и В найти $(A+B)^2$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$Ответ: (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 16 & 42 & 30 \\ 6 & 4 & -66 \\ 23 & 73 & 57 \end{pmatrix}$

20. Найти матрицу, обратную данной $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ $Ответ: A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 1,5 & 0,3 & -0,8 \\ 2,5 & 0,9 & -1,4 \end{pmatrix}$

21. Даны две матрицы А и В: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти: а) АВ; б) A^{-1} $Ответ: а) \begin{pmatrix} 9 & 14 & -3 \\ 5 & 6 & 9 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $б) A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -1 \\ 0,5 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & -0,5 & 2 \end{pmatrix}$

22. Вычислить определители: $а) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ $б) \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

$Ответ: а) \Delta = 160;\ б) \Delta = -8$

23. Решить систему уравнений по формулам Крамера $\begin{cases} 2x+y+3z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$ $Ответ: а) (3;-2;1)$;

24. Решить систему уравнений по формулам методом Гаусса

а) $\begin{cases} 2x+y+3z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ x+y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-3 \end{cases}$ $Ответ: а) (3;-2;1);\ б)\ (1;-3;-1)$

25. Решить систему с помощью обратной матрицы (матричным методом):

$\begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ x+y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-3 \end{cases}$ $Ответ:\ (1;-3;-1)$

26. Найти интегралы:

$а) \int (x^4 x^{-3} x^{\frac{1}{2}})dx,$ $Ответ:\ \frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$

$б) \int \frac{3x+8}{x^2+3x-10}dx$ $Ответ: 2\ln(x-2)+\ln(x+5)+C$

$в) \int \frac{4x^3+2x^2+7x}{2x}dx,$ $Ответ:\ \frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7\ln x+C$

г) $\int \frac{dx}{x^2+10x+34}$ *Ответ*: $\frac{1}{3}arctg\left(\frac{x}{3}+\frac{5}{3}\right)+C$

д) $\int \frac{x^2+6}{x(x-3)^2}dx,$ *Ответ*: $\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{1}{3}\ln|x-3|-\frac{5}{x-3}+C$

е) $\int \frac{x^5x^{-3}}{x^{-2}x}dx$ *Ответ*: $\frac{x^4}{4}+C$

ж) $\int \frac{4x^3+2x^2+7x}{2x}dx,$ *Ответ*: $\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{7}{2}x+C$

з) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-16x-9}}$ *Ответ*: $\frac{1}{2}\ln\left|x-2+\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-16x-9}\right|+C$

и) $\int \frac{3x+1}{(x+3)^2(x-5)}dx,$ *Ответ*: $-\frac{1}{4}\ln|x-3|-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{4}\ln|x-5|+C$

к) $\int (\frac{3}{x}+4e^x+6^x-x^{-\frac{3}{5}})dx$ *Ответ*: $3\ln|x|+4e^x+\frac{6^x}{\ln 6}-\frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}+C$

л) $\int \frac{x^2-7x-6}{(x^2+9)(x-3)}dx,$ *Ответ*: $-\ln|x-3|+\ln|x^2+9|-\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+C$

м) $\int (5e^x+3^x-x^8)dx$ *Ответ*: $5e^x+\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{1}{9}x^9+C$

н) $\int \frac{x-4}{x^2+x-12}dx,$ *Ответ*: $-\frac{1}{7}\ln(x-3)+\frac{8}{7}\ln(x+4)+C$

о) $\int\left(3x^2-\frac{4}{x}+\cos x-5\sin x\right)dx$ *Ответ*: $x^3-4\ln|x|+\sin x+5\cos x+C$

п) $\int\left(x^4\sqrt{x}+\frac{7x^2}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx,$ *Ответ*: $\frac{2}{11}x^{\frac{11}{2}}+\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C$

р) $\int \frac{dx}{x^2+10x+34}$ *Ответ*: $\frac{1}{3}arctg\left(\frac{x}{3}+\frac{5}{3}\right)$

27. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах
$\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$. *Ответ*: 3 *кв.ед*

28. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах
$\vec{a}=(3;2;1),\ \vec{b}=(1;0;-1),\ \vec{c}(1;-2;1)$. *Ответ*: 12 *куб.ед*

29. Выполнить действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме и результат изобразить геометрически:

а) $\frac{1+(-i)^{17}}{i^{23}}$ *Ответ*: $1+i$ б) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+(2+3i)(3+5i)$ *Ответ*: $19i-10$

в) $\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)-(1-i\sqrt{3})$ *Ответ*: $\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}$

30. Произвести действие и результат представить в тригонометрической форме:

а) $\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}$ *Ответ*: $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

б) $\frac{3i^{23}+(i\sqrt[4]{3})^4}{i^5}$ $Ответ: 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

в) $(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})^2$ $Ответ: \left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

г) $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{i(\sqrt{3}-i)}$; $Ответ: \left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

31. Дано: $Z_1=1-\sqrt{3}i,\ Z_2=2+2i;$ Вычислить: $\frac{z_1}{z_2}; {z_1}^5$

$Ответ: \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}-i\sin\frac{7\pi}{12}\right);$ $32\left(\cos\frac{5\pi}{3}-i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

32. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{3x^2+2x}$ $Ответ: \infty$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)Ответ: \left(\frac{5}{2}\right)$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$ $Ответ: e^{12}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ $Ответ: \left(\frac{1}{2}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^4-x^3+2x}{x^4}\right)$ $Ответ: 5$

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{tg3x}$ $Ответ: \frac{2}{3}$

ж) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{4x^2-9}{2x+3}$ $Ответ: -6$

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3+3x^2\right)$ $Ответ: \infty$

и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-10}{x}\right)^{2x+1}$ $Ответ: e^{-20}$

к) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{5-x}{3-\sqrt{2x-1}}$ $Ответ: 3$

л) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x^3+1}\right)$ $Ответ: 0$

м) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$ $Ответ: 0$

н) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$ $Ответ: 2$

о) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$ $Ответ: \sqrt{2}$

п) $\lim\limits_{x\to -3}(\frac{6}{9-x^2}-\frac{1}{x+3})$ $Ответ: \left(\frac{1}{9}\right)$

33. Решить дифференциальные уравнения:

а) $x\,dx+y\,dy=0$; $Ответ: y=\sqrt{c-x^2}$

б) $dy=\left(x^2-1\right)dx,$ *если* $y=4$ *при* $x=1$; $Ответ: y=4\frac{2}{3}$

в) $x\left(y^2-1\right)dx+y\left(x^2+1\right)dy=0$; $Ответ: y^2=\frac{C}{x^2+1}+1$

г) $y'-\frac{3}{x}y=x$; $Ответ: y=\left(C-\frac{1}{x}\right)x$

д) $y'+y\,tg\,x=\cos^2 x$; $Ответ: y=(Sinx+C)\cos x$

е) $y''-2y'+y=0$; $Ответ: y=C_1e^x+C_2e^x$

ж) $y''-4y'+13y=0$; $Ответ: y=e^{2x}\cdot(C_1Cos3x+C_2Cos3x)$

з) $y''-y'-2y=0$; $Ответ: y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$

7. Задания для оценки освоения дисциплины

Тема 1.1 Элементы линейной алгебры (У1, З1)

Практическая работа № 1

Тема: Вычисление определителей второго и третьего порядков

Цель: Проверить знание свойств определителей 2 и 3 порядков, правила вычисления определителей, вычислительные навыки.

Задания

1.Вычислить определители второго порядка: 1) $\Delta=\begin{vmatrix}-\kappa_1 & 2+\kappa_2\\ \kappa_1\cdot\kappa_2 & 5\end{vmatrix}$, 2) $\Delta=\begin{vmatrix}\frac{\kappa_1}{3} & 5^2\\ 3\cdot\kappa_2 & 6\end{vmatrix}$,

3) $\Delta=\begin{vmatrix}9^{0,5} & \kappa_1\cdot 64^{\frac{1}{6}}\\ (0{,}5)^{-3} & \sqrt{4^2}\end{vmatrix}$

2.Вычислить определители третьего порядка:

1) $\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 3\kappa_1 & 2\\ 2 & 8 & \kappa_2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$, 2) $\Delta=\begin{vmatrix}3\kappa_2 & 4 & -5\\ 8 & 7\kappa_2-2 & -2\\ 2 & -1 & 8\end{vmatrix}$, 3) $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & \kappa_1\cdot\kappa_2\\ 3 & \kappa_1 & -5\\ 2 & \kappa_2 & 5\end{vmatrix}$

3. Решить уравнение: $\begin{vmatrix}-1 & x\cdot\kappa_1 & 2\\ 2 & 8 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}+\kappa_2\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ x & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\kappa_1 & x & 1\\ -1 & -2 & 0\\ 3 & 4 & \kappa_2\end{vmatrix}$,

Вариант	κ_1	κ_2	***Вариант***	κ_1	κ_2
1	3	-2	***16***	4	-1
2	4	1	***17***	5	1
3	3	-4	***18***	2	0
4	2	1	***19***	-2	1
5	3	-3	***20***	2	-2
6	1	5	***21***	0	7
7	-2	3	***22***	-1	4
8	6	-2	***23***	-3	3
9	-6	1	***24***	-4	1
10	-5	1	***25***	0	8
11	-2	4	***26***	4	-2
12	1	3	***27***	-1	3
13	-3	2	***28***	2	-3

14	-4	-1	***29***	-2	5
15	-1	5	***30***	-5	-1

Ответы

вариант	1 задание			2 задание			вариант	1 задание			2 задание		
	1	2	3	1	2	3		1	2	3	1	2	3
1.	-15	6	-180	-84	-220	127	16.	-16	63	-244	-89	-100	109
2.	-32	-63	-244	-63	-68	55	17.	-40	-65	68	-72	-68	45
3.	-39	6	-180	-104	2372	261	18.	-10	4	-116	-52	232	60
4.	-16	-71	-20	-45	-68	63	19.	16	-79	140	-9	-68	59
5.	-24	-219	-180	-94	1212	185	20.	-10	146	-116	-64	-220	90
6.	-40	-373	-52	-20	4028	145	21.	0	-925	12	-21	8092	85
7.	40	-229	140	-19	1308	-23	22.	29	-302	76	-24	2500	9
8.	-30	162	-372	-138	-220	286	23.	45	231	204	-16	1308	-85
9.	48	-87	396	27	-68	-65	24.	32	-83	268	9	-68	-9
10	40	-85	332	18	-68	-35	25.	0	-600	12	-20	10628	90
11	10	-304	140	-24	2500	-68	26.	-20	158	-244	-102	-220	172
12	-20	-223	-52	-36	1308	91	27.	20	-227	76	-18	1308	27
13	39	156	204	-8	452	-27	28.	14	229	-116	-73	1212	123
14	16	63	268	31	-100	45	29.	80	-379	-140	-29	4028	-125
15	40	-377	76	-26	4028	-15	30.	30	65	332	46	-100	55

Контрольные вопросы:

1. Что называется определителем матрицы?
2. Как вычислить определитель второго порядка?

3. Какие способы вычисления определителя третьего порядка вам известны?
4. Перечислите свойства определителей.

Практическая работа № 2 (У1, З1)

Тема: Вычисление определителей четвертого порядка

Цель: Проверить знания и умения учащихся по вычислению миноров, алгебраических дополнений, определителей третьего и четвертого порядков.

Задания

Даны определители: 1) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \kappa_1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3\kappa_2 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, 2) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & \kappa_2 \\ -2 & 3 & \kappa_1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$,

1) Найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i3}, a_{2j}

2) Вычислить определители, разложив их по элементам а) i-ой строки, б) j-го столбца

Вариант	κ_1	κ_2	**i**	**j**	**Вариант**	κ_1	κ_2	**i**	**j**
1	3	-2	1	2	**16**	4	-1	2	1
2	4	1	2	1	**17**	5	1	1	2
3	3	-4	1	3	**18**	2	0	3	1
4	2	1	3	4	**19**	-2	1	4	3
5	3	-3	4	1	**20**	2	-2	1	4
6	1	5	2	2	**21**	0	7	2	2
7	-2	3	1	4	**22**	-1	4	4	1
8	6	-2	4	3	**23**	-3	3	3	4
9	-6	1	2	1	**24**	-4	1	1	2
10	-5	1	1	1	**25**	0	8	1	1
11	-2	4	3	2	**26**	4	-2	2	3
12	1	3	4	3	**27**	-1	3	3	4
13	-3	2	2	4	**28**	2	-3	4	2
14	-4	-1	1	2	**29**	-2	5	2	1
15	-1	5	3	1	**30**	-5	-1	1	3

Ответы

вариант	M_{i3}	M_{2j}	A_{i3}	A_{2j}	Δ	вариант	M_{i3}	M_{2j}	A_{i3}	A_{2j}	Δ
1.	-72	-52	72	52	58	16.	-33	15	33	-15	24
	50	-30	-50	30	160		-25	65	25	-65	175
2.	9	15	-9	-15	18	17.	-27	26	-27	26	14
	-15	55	-15	-55	145		50	-15	-50	-15	160
3.	14	-88	-14	88	82	18.	-19	5	-19	-5	47
	50	-40	50	40	180		-12	60	-12	-60	120
4.	-19	6	-19	6	26	19.	15	-33	-15	33	42
	-19	10	19	10	115		-2	-15	2	15	55
5.	7	10	-7	-10	70	20.	-72	24	72	24	89
	-11	75	-11	75	170		50	10	-50	10	130
6.	36	54	-36	54	-90	21.	35	25	-35	25	-200
	5	5	-5	5	100		15	15	-15	15	115
7.	93	-6	93	-6	-72	22.	74	-10	-74	10	-106

	50	10	50	10	85		10	40	-10	-40	100
8.	46	-58	-46	58	-20	23.	-44	-6	-44	-6	-86
	-8	-30	8	30	250		-33	10	-33	10	80
9.	-61	-35	61	35	58	24.	27	-73	-27	-73	50
	-15	55	15	-55	-5		50	-15	50	-15	25
10.	27	-30	-27	30	54	25.	258	-5	-258	5	-239
	50	55	-5-	-55	10		50	20	-50	-20	120
11.	-39	-78	-39	-78	-129	26.	-54	-54	54	54	27
	-40	0	40	0	100		-30	-30	30	-30	190
12.	21	12	-21	-12	-30	27.	-34	-6	-34	-6	-58
	7	-5	-7	5	100		-33	10	-33	10	90
13.	-40	0	40	0	-20	28.	-13	-115	13	-115	110
	-10	10	10	10	60		-11	-35	11	-35	135
14.	-39	-19	-39	-19	200	29.	-21	-15	21	15	-186
	50	-25	-50	-25	-25		5	35	-5	-35	115
15.	-34	-10	-34	10	-154	30.	-39	-42	-39	42	222
	-47	35	-47	-35	110		50	-25	-50	25	-50

Контрольные вопросы:

1. Что называется минором?
2. Что называется алгебраическим дополнением элемента матрицы?
3. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?

Практическая работа № 3
Действия над матрицами

Цель: Проверить знания операций над матрицами, умения выполнять действия с матрицами: сложение, вычитание, умножение матрицы на число, произведение матриц

Задания

1.Выполнить действия над матрицами $D = 2 \cdot (A + B) - \kappa_1 \cdot B + \kappa_2 \cdot A$

2.Вычислить матрицу и найти ее определитель $C = \cdot(\kappa_1 \cdot B + \kappa_2 \cdot A) \cdot B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \kappa_1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -\kappa_2 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Найти $C \cdot D$ *и* $D \cdot C$

Вариант	κ_1	κ_2	Ответ Δ_c	***Вариант***	κ_1	κ_2	Ответ Δ_c
1	3	-2	741	***16***	4	-1	18343
2	4	1	36069	***17***	5	1	121446
3	3	-4	8359	***18***	2	0	1800
4	2	1	-1323	***19***	-2	1	-291
5	3	-3	810	***20***	2	-2	-144
6	1	5	-84134	***21***	0	7	-79233
7	-2	3	-2009	***22***	-1	4	-477
8	6	-2	-31696	***23***	-3	3	-16524
9	-6	1	199611	***24***	-4	1	-21195
10	-5	1	-73794	***25***	0	8	-129536
11	-2	4	-2520	***26***	4	-2	3000

12	1	3	-17756	***27***	-1	3	84
13	-3	2	-9581	***28***	2	-3	729
14	-4	-1	999	***29***	-2	5	-1463
15	-1	5	-1494	***30***	-5	-1	-7520

Ответы

вариант	CD	DC	вариант	CD	DC
1.	$\begin{pmatrix} 61 & 178 & -104 \\ -32 & 317 & -58 \\ -24 & 196 & -29 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 215 & 22 & 122 \\ -394 & 81 & -90 \\ 144 & -14 & 53 \end{pmatrix}$	**16.**	$\begin{pmatrix} 134 & 608 & 16 \\ -468 & 600 & -134 \\ -550 & 696 & -154 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 200 & 230 & 434 \\ -936 & 294 & -94 \\ -68 & 84 & 86 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 82 & 364 & -8 \\ -272 & 756 & -70 \\ -474 & 1528 & 9118 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 130 & 446 \\ -904 & 482 & -50 \\ -152 & -20 & 230 \end{pmatrix}$	**17.**	$\begin{pmatrix} -435 & 1057 & 399 \\ -1045 & 1258 & -130 \\ -1796 & 2403 & -185 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -538 & 481 & 1229 \\ -2078 & 915 & -75 \\ -651 & 378 & 281 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 1 & 66 & -58 \\ -50 & 319 & -86 \\ 32 & 114 & -25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 373 & 52 & 184 \\ -470 & -5 & -144 \\ -102 & -50 & -73 \end{pmatrix}$	**18.**	$\begin{pmatrix} -68 & 8 & -160 \\ 124 & 164 & 20 \\ 200 & 268 & 40 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -60 & 0 & -80 \\ -60 & 36 & -4 \\ 312 & -156 & 160 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} -96 & -26 & -192 \\ 128 & 178 & 20 \\ 310 & 450 & 46 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -196 & 52 & -142 \\ -24 & 30 & 36 \\ 414 & -288 & 234 \end{pmatrix}$	**19.**	$\begin{pmatrix} 76 & -14 & 112 \\ -170 & 54 & -256 \\ -18 & -26 & -10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & -128 & 74 \\ 50 & 110 & 16 \\ 98 & 280 & 2 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} -273 & 129 & -501 \\ -783 & -264 & 144 \\ -264 & -87 & 33 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -246 & -111 & -243 \\ 0 & -69 & -81 \\ 159 & -210 & -189 \end{pmatrix}$	**20.**	$\begin{pmatrix} 36 & 4 & -72 \\ 140 & 172 & 8 \\ 28 & 48 & -20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 92 & -8 & 44 \\ -176 & 12 & -84 \\ 108 & -48 & 12 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} -271 & -175 & -149 \\ -9 & 186 & -86 \\ 836 & 651 & -13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -478 & 797 & -511 \\ 390 & -369 & 317 \\ 973 & -1266 & 749 \end{pmatrix}$	**21.**	$\begin{pmatrix} -182 & 28 & 112 \\ -224 & 308 & -322 \\ 882 & -476 & -98 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -616 & 1498 & -742 \\ 644 & -882 & 630 \\ 1680 & -1820 & 1526 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 36 & 38 & 56 \\ -202 & 222 & -368 \\ 346 & -454 & 546 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -160 & -48 & -178 \\ 286 & 6 & 360 \\ 734 & -4 & 958 \end{pmatrix}$	**22.**	$\begin{pmatrix} -51 & 58 & 6 \\ -178 & 175 & -214 \\ 520 & -534 & 451 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -295 & 340 & -376 \\ 394 & -261 & 456 \\ 1002 & -546 & 1131 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} 3704 & -48 & 1060 \\ -512 & 472 & -124 \\ -780 & 720 & -164 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2644 & 1164 & 2228 \\ 560 & 1636 & -180 \\ 372 & 1428 & -268 \end{pmatrix}$	**23.**	$\begin{pmatrix} 249 & 129 & 153 \\ -315 & 372 & -522 \\ 228 & -567 & 675 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 & -213 & -81 \\ 234 & 177 & 351 \\ 603 & 252 & 1107 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 7672 & 2014 & 1312 \\ -2222 & 26 & -1780 \\ 2874 & -182 & 1538 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7448 & 1900 & 866 \\ -1594 & 222 & -900 \\ -3258 & 400 & -1510 \end{pmatrix}$	**24.**	$\begin{pmatrix} 906 & 292 & 408 \\ -568 & 124 & -814 \\ -554 & 0 & -518 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 776 & 58 & 302 \\ -224 & 258 & -282 \\ -480 & 540 & -522 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 2935 & 877 & 739 \\ -1145 & 108 & -1240 \\ -1356 & -47 & -955 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2762 & 161 & 509 \\ -688 & 275 & -545 \\ -1441 & 538 & -949 \end{pmatrix}$	**25.**	$\begin{pmatrix} -176 & 48 & 224 \\ -272 & 400 & -416 \\ 944 & -672 & -304 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -704 & 1936 & -848 \\ 736 & -1136 & 720 \\ 1968 & -2192 & 1760 \end{pmatrix}$
11.	$\begin{pmatrix} 52 & 112 & 88 \\ -236 & 324 & -364 \\ 456 & -884 & 704 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -244 & 64 & -304 \\ 404 & -124 & 532 \\ 1064 & -284 & 1448 \end{pmatrix}$	**26.**	$\begin{pmatrix} 124 & 652 & 16 \\ -548 & 540 & -160 \\ -516 & 424 & -148 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 292 & 244 & 428 \\ -952 & 212 & -116 \\ -220 & 76 & 8 \end{pmatrix}$
12.	$\begin{pmatrix} -195 & -79 & -175 \\ 29 & 96 & -14 \\ 556 & 389 & 111 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -316 & 339 & -337 \\ 238 & -159 & 195 \\ 623 & -652 & 487 \end{pmatrix}$	**27.**	$\begin{pmatrix} 35 & -29 & 43 \\ -89 & 64 & -84 \\ 136 & -99 & 165 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -50 & -55 & -47 \\ 108 & 45 & 107 \\ 247 & 124 & 269 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 223 & 66 & 164 \\ -296 & 229 & -494 \\ 56 & -180 & 281 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 73 & -194 & 46 \\ 106 & 217 & 126 \\ 276 & 418 & 443 \end{pmatrix}$	**28.**	$\begin{pmatrix} -32 & -34 & -16 \\ 154 & 194 & -4 \\ -34 & 10 & -74 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 168 & 36 & 106 \\ -234 & -18 & -124 \\ 6 & -72 & -62 \end{pmatrix}$
14.	$\begin{pmatrix} 942 & 408 & 720 \\ -620 & -240 & -926 \\ -1334 & -496 & -2250 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 808 & 334 & 546 \\ -496 & -138 & -854 \\ -1116 & -268 & -2218 \end{pmatrix}$	**29.**	$\begin{pmatrix} 107 & 238 & 114 \\ -186 & 346 & -299 \\ 259 & -1268 & 523 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -168 & 101 & -221 \\ 336 & -191 & 453 \\ 956 & -396 & 1335 \end{pmatrix}$

15.	$\begin{pmatrix} -45 & 117 & 63 \\ -221 & 252 & -284 \\ 604 & 871 & 441 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -386 & 577 & -495 \\ 500 & -441 & 583 \\ 1311 & -874 & 1475 \end{pmatrix}$	**30.**	$\begin{pmatrix} 307 & 1023 & 835 \\ 1361 & -484 & -1528 \\ -1700 & -615 & -2127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2982 & 1105 & 729 \\ -1008 & -343 & -865 \\ -1993 & -664 & -2243 \end{pmatrix}$

Контрольные вопросы

1. Что называется матрицей?
2. Какие матрицы называются равными?
3. Что называется главной диагональю матрицы?
4. Какая матрица называется диагональной?
5. Как найти сумму и разность матриц?
6. Правило умножения матрицы на число.
7. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?

Практическая работа № 4

Нахождение обратной матрицы

Цель: Проверить умения нахождения миноров, алгебраических дополнений и определителей. Правило вычисления обратной матрицы.

Задания. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \kappa_1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -\kappa_2 & 4 \end{pmatrix}$. Найти

а) A^{-1} *и проверить, что* $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

б) $A + A^{-1}$

Вариант	κ_1	κ_2	***Вариант***	κ_1	κ_2
1	3	-2	***16***	4	-1
2	4	1	***17***	5	1
3	3	-4	***18***	2	0
4	2	1	***19***	-2	1
5	3	-3	***20***	2	-2
6	1	5	***21***	0	7
7	-2	3	***22***	-1	4
8	6	-2	***23***	-3	3
9	-6	1	***24***	-4	1
10	-5	1	***25***	0	8
11	-2	4	***26***	4	-2
12	1	3	***27***	-1	3
13	-3	2	***28***	2	-3
14	-4	-1	***29***	-2	5
15	-1	5	***30***	-5	-1

Ответы

1 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 15 & -8 \\ 1 & -12 & 7 \end{pmatrix}$	**2** $\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -2 & 15 & -8 \\ -5 & -3 & 7 \end{pmatrix}$	**3** $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 2 & -15 & 8 \\ -5 & 18 & -7 \end{pmatrix}$	**4** $\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ -5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$	**5** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & -15 & 8 \\ -3 & 15 & -7 \end{pmatrix}$
6	**7** $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -10 & -11 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 9 & 12 & -2 \end{pmatrix}$	**8** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 27 & -14 \\ 1 & -18 & 10 \end{pmatrix}$	**9** $\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 21 & -10 \\ 5 & 12 & 2 \end{pmatrix}$	**10** $\frac{1}{21}\begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 17 & -8 \\ 5 & 11 & 1 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{31}\begin{pmatrix}14&13&-3\\-2&7&-4\\-13&-1&5\end{pmatrix}$					
11 $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-12&-12&3\\2&5&-2\\11&14&-2\end{pmatrix}$	**12** $\frac{1}{23}\begin{pmatrix}10&11&-3\\-2&7&-4\\-9&-3&5\end{pmatrix}$	**13** $\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-8&-10&3\\2&9&-4\\7&12&-1\end{pmatrix}$	**14** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&-7&3\\2&13&-6\\1&2&0\end{pmatrix}$	**15** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}14&13&-3\\-2&-1&0\\-13&-11&3\end{pmatrix}$	
16 $\frac{1}{13}\begin{pmatrix}2&7&-3\\-2&19&-10\\-1&-10&8\end{pmatrix}$	**17** $\frac{1}{39}\begin{pmatrix}6&9&-3\\-2&23&-12\\-5&-1&9\end{pmatrix}$	**18** $\frac{1}{15}\begin{pmatrix}4&8&-3\\-2&11&-6\\-3&-6&6\end{pmatrix}$	**19** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6&-9&3\\2&5&-2\\5&8&-2\end{pmatrix}$	**20** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&6&-3\\-2&11&-6\\1&-10&6\end{pmatrix}$	
21 $\frac{1}{21}\begin{pmatrix}18&15&-3\\-2&3&-2\\-17&-6&4\end{pmatrix}$	**22** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}12&12&-3\\-2&-1&0\\-11&-10&3\end{pmatrix}$	**23** $\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-10&-11&3\\2&9&-4\\9&15&-1\end{pmatrix}$	**24** $\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-6&-9&3\\2&13&-6\\5&10&0\end{pmatrix}$	**25** $\frac{1}{23}\begin{pmatrix}20&16&-3\\-2&3&-2\\-19&-6&4\end{pmatrix}$	
26 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&6&-3\\-2&19&-10\\1&-14&8\end{pmatrix}$	**27** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}10&11&-3\\-2&-1&0\\-9&-9&3\end{pmatrix}$	**28** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-5&3\\2&-11&6\\-3&12&-6\end{pmatrix}$	**29** $\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-14&-13&3\\2&5&-2\\13&16&-2\end{pmatrix}$	**30** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2&-7&3\\2&17&-8\\1&1&1\end{pmatrix}$	

Контрольные вопросы

1. Какая матрица называется невырожденной?
2. Транспонированная матрица.
3. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
4. Каков порядок вычисления обратной матрицы?

Практическая работа №5
Системы линейных алгебраических уравнений

Цель: Проверить умения учащихся решать системы линейных уравнений по правилу Крамера, с помощью обратной матрицы (матричным методом), методом Гаусса.

Задание:

1. Решить системы уравнений:

а) по формуле Крамера;

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);

в) Методом Гаусса.

1.1. $\begin{cases}2x+y+3z=7,\\2x+3y+z=1,\\3x+2y+z=6.\end{cases}$ 1.2. $\begin{cases}2x-y+2z=3,\\x+y+2z=-4,\\4x+y+4z=-3.\end{cases}$ 1.3. $\begin{cases}3x-y+z=12,\\x+2y+4z=6,\\5x+y+2z=3.\end{cases}$

1.4. $\begin{cases}2x-y+3z=-4,\\x+3y+3z=11,\\x-2y+2z=-7.\end{cases}$ 1.5. $\begin{cases}3x-2y+4z=12,\\3x+4y-2z=6,\\2x-y-z=-9.\end{cases}$ 1.6. $\begin{cases}8x+3y-6z=-4,\\x+y-z=2,\\4x+y-3z=-5.\end{cases}$

1.7. $\begin{cases}4x+y-3z=9,\\x+y-z=-2,\\8x+3y-6z=12.\end{cases}$ 1.8. $\begin{cases}2x+3y+4z=33,\\7x-5y=24,\\4x+11z=39.\end{cases}$ 1.9. $\begin{cases}2x+3y+4z=12,\\7x-5y+z=-33,\\4x+z=-7.\end{cases}$

1.10. $\begin{cases}x+4y-z=6,\\5y+4z=-20,\\3x-2y+5z=-22.\end{cases}$ 1.11. $\begin{cases}3x-2y+4z=21,\\3x+4y-2z=9,\\2x-y-z=10.\end{cases}$ 1.12. $\begin{cases}3x-2y-5z=5,\\2x+3y-4z=12,\\x-2y+3z=-1.\end{cases}$

1.13. $\begin{cases}4x+y+4z=19,\\2x-y+2z=11,\\x+y+2z=8.\end{cases}$ 1.14. $\begin{cases}2x-y+2z=0,\\4x+y+4z=6,\\x+y+2z=4.\end{cases}$ 1.15. $\begin{cases}2x-y+2z=8,\\x+y+2z=11,\\4x+y+4z=22.\end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 2x-y-3z=-9, \\ x+5y+z=20, \\ 3x+4y+2z=15. \end{cases}$ 1.17. $\begin{cases} 2x-y-3z=0, \\ 3x+4y+2z=1, \\ x+5y+z=-3. \end{cases}$ 1.18. $\begin{cases} -3x+5y+6z=-8, \\ 3x+y+z=-4, \\ x-4y-2z=-9. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} 3x+y+z=-4, \\ -3x+5y+6z=36, \\ x-4y-2z=19. \end{cases}$ 1.20. $\begin{cases} 3x-y+z=-11, \\ 5x+y+2z=8, \\ x+2y+4z=16. \end{cases}$ 1.21. $\begin{cases} 3x-y+z=9, \\ 5x+y+2z=11, \\ x+2y+4z=19. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 2x+3y+z=4, \\ 2x+y+3z=0, \\ 3x+2y+z=1. \end{cases}$ 1.23. $\begin{cases} 2x+3y+z=12, \\ 2x+y+3z=16, \\ 3x+2y+z=8. \end{cases}$ 1.24. $\begin{cases} x-2y+3z=14, \\ 2x+3y-4z=-16, \\ 3x-2y-5z=-8. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 3x+4y-2z=11, \\ 2x-y-z=4, \\ 3x-2y+4z=11. \end{cases}$ 1.26. $\begin{cases} x+5y-6z=-15, \\ 3x+y+4z=13, \\ 2x-3y+z=9. \end{cases}$ 1.27. $\begin{cases} 4x-y=-6, \\ 3x+2y+5z=-14, \\ x-3y+4z=-19. \end{cases}$ 1.28. $\begin{cases} 5x+2y-4z=-16, \\ x+3z=-6, \\ 2x-3y+z=9. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} x+4y-z=-9, \\ 4x-y+5z=-2, \\ 3y-7z=-6. \end{cases}$ 1.30. $\begin{cases} 7x+4y-z=13, \\ 3x+2y+3z=3, \\ 2x-3y+z=-10. \end{cases}$

2. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

3.1. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2x-3y+4z=0, \\ 4x-11y+10z=0. \end{cases}$ 3.2. $\begin{cases} 3x-y+2z=0, \\ x+y+z=0, \\ x+3y+3z=0. \end{cases}$ 3.3. $\begin{cases} x+3y+2z=0, \\ 2x-y+3z=0, \\ 3x-5y+4z=0. \end{cases}$ 3.4. $\begin{cases} 4x-y+10z=0, \\ x+2y-z=0, \\ 2x-3y+4z=0. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 2x+5y+z=0, \\ 4x+6y+3z=0, \\ x-y-2z=0. \end{cases}$ 3.6. $\begin{cases} 3x-y-3z=0, \\ 2x+3y+z=0, \\ x+y+3z=0. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} x-y+2z=0, \\ 2x+y-3z=0, \\ 3x+2z=0. \end{cases}$ 3.8. $\begin{cases} 2x-y-5z=0, \\ x+2y-3z=0, \\ 5x+y+4z=0. \end{cases}$ 3.9. $\begin{cases} 5x-5y+4z=0, \\ 3x+y+3z=0, \\ x+7y-z=0. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} x+3y-z=0, \\ 2x+5y-2z=0, \\ x+y+5z=0. \end{cases}$ 3.11. $\begin{cases} 2x+y+3z=0, \\ 3x-y+2z=0, \\ x+3y+4z=0. \end{cases}$ 3.12. $\begin{cases} x-2y-z=0, \\ 2x+3y+2z=0, \\ 3x-2y+5z=0. \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 2x+y-z=0, \\ 3x-2y+4z=0, \\ x-5y+3z=0. \end{cases}$ 3.14. $\begin{cases} 4x+y+3z=0, \\ 8x-y+7z=0, \\ 2x+4y-5z=0. \end{cases}$ 3.15. $\begin{cases} x+4y-3z=0, \\ 2x+5y+z=0, \\ x-7y+2z=0. \end{cases}$ 3.16. $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ 3x+y+2z=0, \\ 2x-3y+5z=0. \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} x+2y+3z=0, \\ 2x-y-z=0, \\ 3x+3y+2z=0. \end{cases}$ 3.18. $\begin{cases} 3x+2y=0, \\ x-y+2z=0, \\ 4x-2y+5z=0. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 2x-y+3z=0, \\ x+2y-5z=0, \\ 3x+y+z=0. \end{cases}$ 3.20. $\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ 2x-y+3z=0, \\ 4x+3y+4z=0. \end{cases}$ 3.21. $\begin{cases} x-3y-4z=0, \\ 5x-8y-2z=0, \\ 2x+y-z=0. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} 3x+5y-z=0, \\ 2x+4y-3z=0, \\ x-3y+z=0. \end{cases}$ 3.23. $\begin{cases} 3x-2y+z=0, \\ 2x-3y+2z=0, \\ 4x+y-4z=0. \end{cases}$ 3.24. $\begin{cases} 7x+y-3z=0, \\ 3x-2y+3z=0, \\ x-y+2z=0. \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} x+2y-4z=0, \\ 2x-y-3z=0, \\ x+3y+z=0. \end{cases}$ 3.26. $\begin{cases} 7x-6y+z=0, \\ 4x+5y=0, \\ x-2y+3z=0. \end{cases}$ 3.27. $\begin{cases} 5x-4y+2z=0, \\ 3x-2y=0, \\ 4x+y-3z=0. \end{cases}$

3.28. $\begin{cases} 6x+5y-4z=0, \\ x+y-z=0, \\ 3x+4y+3z=0. \end{cases}$ 3.29. $\begin{cases} 8x+y-3z=0, \\ x-+5y+z=0, \\ 4x-7y+2z=0. \end{cases}$ 3.30. $\begin{cases} x+7y-3z=0, \\ 3x-5y+z=0, \\ 3x+4y-2z=0. \end{cases}$

Ответы

вариант Δ	1 12,36,24,12	2 -6,12,18,2	3 -12,36,24,-12	4 8,-8,28,4	5 -60,0,240,-300
x, y, z	3 , 2, 1	-2, 3, -1/3	3, -2, 1	-1, 3,5, 0,5	0, -3, 5
вариант Δ	6 -1,-1,-6,-5	7 1,3,-6,-1	8 -261, -1827, 1305, -261	9 61,-122,244,61	10 96,96,0,-480
x, y, z	1 ,6, 5	3, -6, -1	7, 5, 1	-2, 4, 1	1, 0,-5
вариант Δ	11 -60,-300,60,-60	12 58,174,116,0	13 -6,-6,6,-24	14 6,0,12,6	15 -6,-6,-12,-24
x, y, z	5, -1, 1	3, 2, 0	1, -1, 4	0, 2, 1	1, 2, 4
вариант Δ	16 44,-44,176,44	17 -44,-44,44,-44	18 -49,49,-245,294	19 49,-109,-651,782	20 27,0,270,-27
x, y, z	-1, 4, 1	1, -1, 1	-1, 5, -6	-109/49, -93/7, 782/49	0, 10, -1
вариант Δ	21 27,9,-60,156	22 12,-12,24,0	23 12,-12,36,60	24 -58,-58,116,-174	25 -60,-180,-60,-60
x, y, z	1/3,-20/9,52/9	-1, 2, 0	-1, 3, 5	1, -2, 3	3, 1, 1
вариант Δ	26 104,208,-104,208	27 99,-99,198,-297	28 67,-150,-329,-84	29 92, -92, -184, 0	30 102,0,306,-102
x, y, z	2, -1, 2	-1, 2, -3	-150/67, -329/67, -84/67	-1, -2, 0	0, 3, -1

Тест
по теме «Линейная алгебра»

Если матрица $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, то матрица $5A$ имеет вид:

a) $\begin{pmatrix} 24 & 10 \\ -12 & -30 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 20 & 5 \\ -10 & -15 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} -20 & 5 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$

1. Если матрицы $A=\begin{pmatrix}1&0&4\\3&1&2\\-4&1&2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&0&1\\5&2&-3\end{pmatrix}$, то матрица $2A+B$ имеет вид:

   a) $\begin{pmatrix}4&1&7\\9&2&5\\-3&4&1\end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix}-4&1&-7\\9&1&5\\-3&1&2\end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix}-1&8&4\\-3&1&-2\\4&1&0\end{pmatrix}$

2. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}4&1&7\\9&2&5\\-3&4&2\end{pmatrix}$ указать сумму элементов, расположенных на главной диагонали

   a) 6 *b*) 10 *c*) 8

3. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}4&1&7\\9&2&5\\-3&4&2\end{pmatrix}$ указать сумму элементов, расположенных на побочной диагонали

   a) 6 *b*) 10 *c*) 8

5. При умножении матрицы A на матрицу B должно соблюдаться условие:
   a) число строк матрицы A равно числу строк матрицы B
   b) число строк матрицы A равно числу столбцов матрицы B
   c) число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B

6. Квадратная матрица называется *диагональной, если:*
   a) элементы, лежащие на главной диагонали равны нулю
   b) элементы, не лежащие на главной диагонали равны нулю
   a) элементы, лежащие на побочной диагонали равны нулю

7. При каком значении α определитель $\begin{vmatrix}1&4&5\\0&4&2\\0&0&2\alpha-1\end{vmatrix}$ равен нулю?

   a) 2 *b*) 12 *c*) -2

8. Если поменять местами две строки (два столбца) квадратной матрицы, то определитель:
   a) не изменится
   b) станет равным нулю
   c) поменяет знак

9. Чему равен минор M_{21} определителя $\begin{vmatrix}-1&2&0\\3&7&-1\\5&4&2\end{vmatrix}$?

   a) 4 b) 0 c) 11

10. Чему равен минор M_{31} определителя $\begin{vmatrix}-1&2&0\\3&7&-1\\5&4&2\end{vmatrix}$?

a) 4 b) -2 c) 0

11. Чему равно алгебраическое дополнение A_{21} определителя $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$?

a) -4 b) 0 c) -11

12. Чему равно алгебраическое дополнение A_{31} определителя $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$?

a) 4 b) -2 c) 0

13. Чему равен главный определитель системы уравнений $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = 15 \end{cases}$

a) -5 b) 6 c) 5

14. Если матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ и $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, то определитель матрицы $A \cdot D$ равен:

a) -32 b) 32 c) -16

15. Найти минор для элемента a_{32} определителя $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

$a) 2$ $b) 20$ $c) -20$

16. Найти алгебраическое дополнение для элемента a_{32} определителя $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

$a) 2$ $b) 20$ $c) -20$

17. Найти минор для элемента a_{23} определителя $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$a) -8$ $b) 8$ $c) -5$

18. Найти алгебраическое дополнение для элемента a_{23} определителя $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$a) -8$ $b) 8$ $c) -5$

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Найти матрицу $C=A+3B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 4 & 13 & 11 \\ 5 & 13 & 3 \end{pmatrix}$

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.
4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Ответ: (2;0;1)

Вариант 2

1. Найти матрицу $C=2A-B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -6 & -2 & 15 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.
4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Ответ: (1;3;0)

Вариант 3

1. Найти матрицу $C=3A+B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 3 \\ -4 & 7 & 25 \\ 7 & 15 & 9 \end{pmatrix}$

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.
4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Ответ: (0;2;1)

Вариант 4

1. Найти матрицу $C=A-4B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

   Ответ: $C=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -12 \\ -10 & -15 & 4 \\ -2 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.
4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=3, \\ x_1+3x_2+x_3=6, \\ 2x_1-x_2+x_3=4. \end{cases}$$

Ответ: (2;1;1)

Вариант 5

1. Найти матрицу $C=4A-B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

   Ответ: $C=\begin{pmatrix} 9 & 12 & -3 \\ -10 & 0 & 31 \\ 7 & 13 & 12 \end{pmatrix}$

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.
4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=2, \\ x_1+2x_2+x_3=3, \\ 3x_1+7x_2+x_3=10. \end{cases}$$

Ответ: (1;1;0)

Вариант 6

1. Найти матрицу $C=A+2B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

   Ответ: $C=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 9 & 10 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}$

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.
4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ: (0;1;2)

Раздел 2
Элементы аналитической геометрии

Устный опрос

1. Что называется вектором?
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Что называется координатами вектора?
4. Как найти координаты вектора, заданного двумя точками?
5. Как найти длину вектора, заданного своими координатами?
6. Запишите формулы деления отрезка в данном отношении.
7. Дать определение проекции вектора на ось и перечислить ее свойства.
8. Дать определение скалярного произведения векторов.
9. Дать определение векторного произведения векторов.
10. Дать определение смешанного произведения векторов.

Практическая работа № 6
Операции над векторами. Вычисление модуля и скалярного произведения

Цель: Проверить знания и умения по нахождению: координат вектора, операций над векторами, модуля вектора и скалярного произведения.

Задания

1. По координатам точек A, B и C для указанных векторов найти:
   a) Координаты векторов $a = AB,\ b = BC,\ c = AC,\ d = BA,\ p = CA$
   b) Модуль вектора $\vec{\kappa} = 3\vec{a} + \vec{e} - \vec{d}$
   c) Скалярное произведение векторов **a** и **b**;
   d) Проекцию вектора **c** на вектор **d**;
   e) Координаты точки M, делящей отрезок **p** в отношении $\alpha : \beta$

Варианты	Координаты точки A	Координаты точки B	Координаты точки C	α	β
1.	(-2, 1,3)	(3, -6, 2)	(-5, -3, -1)	*1*	*3*
2.	(1, 3, 6)	(-3, 4, -5)	(1, -7, 2)	*1*	*2*
3.	(7, 2, 1)	(5, 1, -2)	(-3, 4, 5)	*2*	*1*
4.	(3, 5, 4)	(-2, 7, -5)	(6, -2, 1)	*3*	*2*
5.	(5, 3, 2)	(2, -5, 1)	(-7, 4, -3)	*2*	*3*
6.	(11, 1, 2)	(-3, 3, 4)	(-4, -2, 7)	*1*	*2*
7.	(9, 5, 3)	(-3, 2, 1)	(4, -7, 4)	*3*	*1*
8.	(7, 2, 1)	(3, -5, 6)	(-4, 3, -4)	*3*	*2*
9.	(1, 2, 3)	(-5, 3, -1)	(-6, 4, 5)	*2*	*1*
10.	(-2, 5, 1)	(3, 2, -7)	(4, -3, 2)	*4*	*1*
11.	(3, 1, 2)	(-4, 3, -1)	(2, 3, 4)	*2*	*1*
12	(3, -1, 2)	(-2, 4, 1)	(4, -5, -1)	*1*	3
13.	(4, 5, 1)	(1, 3, 1)	(-3, -6, 7)	*3*	*4*

14.	(1, -3, 1)	(-2, -4, 3)	(0, -2, 3)	*2*	*3*
15.	(5, 7, -2)	(-3, 1, 3)	(1, -4, 6)	*4*	*3*
16.	(-l, 4, 3)	(3, 2, -4)	(-2, -7, 1)	*1*	*3*
17.	(5, 4, 1)	(-3, 5, 2)	(2, -1, 3)	*3*	*1*
18.	(2, -1, 4)	(-3, 0, -2)	(4, 5, -3)	*2*	*1*
19.	(-1, 1, 2)	(2, -3, -5)	(-6, 3, -1)	*1*	*2*
20.	(1, 3, 4)	(-2, 5, 0)	(3, -2, -4)	*2*	*3*
21.	(1, -1, 1)	(-5, -3, 1)	(2, -1, 0)	*3*	*2*
22.	(3, 1, 2)	(-7, -2, -4)	(-4, 0, 3)	*2*	*1*
23.	(-3, 0, 1)	(2, 7, -3)	(-4, 3, 5)	*1*	*3*
24.	(5, 1, 2)	(-2, 1, -3)	(4, -3, 5)	*2*	*3*
25.	(0, 2, -3)	(4, -3, -2)	(-5, -4, 0)	*1*	*2*
26.	(3, -1, 2)	(-2, 3, 1)	(4, -5, -3)	*3*	*4*
27.	(5, 3, 1)	(-1, 2, -3)	(3, -4, 2)	*1*	*2*
28.	(3, 1, -3)	(-2, 4, 1)	(1, -2, 5)	*3*	*4*
29.	(6, 1, -3)	(-3, 2, 1)	(-1, -3, 4)	*4*	*3*
30.	(4, 2, 3)	(-3, 1, -8)	(2, -4, 5)	*3*	*2*

2. Доказать, что векторы a, b, c образуют базис, и найти координаты вектора d в этом базисе.

Варианты	**a**	**b**	**c**	**d**	***ответ***
1.	(5, 4, 1)	(-3, 5, 2)	(2, -1, 3)	(7, 23, 4)	*3i+2j-k*
2.	(2, -1, 4)	(-3, 0, -2)	(4, 5, -3)	(0, 11, -14)	*-i+2j+2k*
3.	(-1, 1, 2)	(2, -3, -5)	(-6, 3, -1)	(28, -19, -7)	*2i+3j-4k*
4.	(1, 3, 4)	(-2, 5, 0)	(3, -2, -4)	(13, -5, -4)	*2i-j+3k*
5.	(1, -1, 1)	(-5, -3, 1)	(2, -1, 0)	(-15, -10, 5)	*2i+3j-k*
6.	(3, 1, 2)	(-7, -2, -4)	(-4, 0, 3)	(16, 6, 15)	*2i-2j+k*
7.	(-3, 0, 1)	(2, 7, -3)	(-4, 3, 5)	(-16, 33, 13)	*2i+3j+4k*
8.	(5, 1, 2)	(-2, 1, -3)	(4, -3, 5)	(15, -15, 24)	*-i+3j+4k*
9.	(0, 2, -3)	(4, -3, -2)	(-5, -4, 0)	(-19, -5, -4)	*2i-j+3k*
10.	(3, -1, 2)	(-2, 3, 1)	(4, -5, -3)	(-3, 2, -3)	*-i+2j+k*
11.	(5, 3, 1)	(-1, 2, -3)	(3, -4, 2)	(-9, 34, -20)	*2i+4j-5k*
12.	(3, 1, -3)	(-2, 4, 1)	(1, -2, 5)	(l, 12, -20)	*2i+j-3k*
13.	(6, 1, -3)	(-3, 2, 1)	(-1, -3, 4)	(15, 6, -17)	*i-2j-3k*
14.	(4, 2, 3)	(-3, 1, -8)	(2, -4, 5)	(-12, 14, -31)	*i-2j-3k*
15.	(-2, 1,3)	(3, -6, 2)	(-5, -3, -1)	(31, -6, 22)	*2j-3k*
16.	(1, 3, 6)	(-3, 4, -5)	(1, -7, 2)	(-2, 17, 5)	*2i+j-k*
17.	(7, 2, 1)	(5, 1, -2)	(-3, 4, 5)	(26, 11, 1)	*2i+3j+k*
18.	(3, 5, 4)	(-2, 7, -5)	(6, -2, 1)	(6, -9, 22)	*2i-3j-k*
19.	(5, 3, 2)	(2, -5, 1)	(-7, 4, -3)	(36, 1, 15)	*5i+2j-k*
20.	(11, 1, 2)	(-3, 3, 4)	(-4, -2, 7)	(-5, 11, -15)	*-i+2j-3k*
21.	(9, 5, 3)	(-3, 2, 1)	(4, -7, 4)	(-10, -13, 8)	*-i+3j+2k*
22.	(7, 2, 1)	(3, -5, 6)	(-4, 3, -4)	(-1, 18, -16)	*2i-j+3k*
23.	(1, 2, 3)	(-5, 3, -1)	(-6, 4, 5)	(-4, 11, 20)	*3i-j+2k*
24.	(-2, 5, 1)	(3, 2, -7)	(4, -3, 2)	(-4, 22, -13)	*3i+2j-k*
25.	(3, 1, 2)	(-4, 3, -1)	(2, 3, 4)	(14, 14, 20)	*2i+4k*
26.	(3, -1, 2)	(-2, 4, 1)	(4, -5, - 1)	(-5, 11, 1)	*-i+5j+2k*
27.	(4, 5, 1)	(1, 3, 1)	(-3, -6, 7)	(19, 33, 0)	*3i+4j-k*
28.	(1, -3, 1)	(-2, -4, 3)	(0, -2, 3)	(-8, -10, 13)	*-2i+3j+2k*
29.	(5, 7, -2)	(-3, 1, 3)	(1, -4, 6)	(14, 9, -1)	*2i-j+k*
30.	(-l, 4, 3)	(3, 2, -4)	(-2, -7, 1)	(6, 20, -3)	*i+j-2k*

Контрольные вопросы

1. Что называется вектором?
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Что называется координатами вектора?
4. Как найти координаты вектора, заданного двумя точками?
5. Как найти длину вектора, заданного своими координатами?
6. Запишите формулы деления отрезка в данном отношении.

Практическая работа № 7
Тема. Вычисление векторного и смешанного произведений

Цель: Проверить знания, умения по вычислению координат и модуля вектора, скалярного, векторного и смешанного произведений векторов.

Задание

1. Даны векторы **a**, **b** и **c.** Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение трех векторов;

б) найти модуль векторного произведения;

в) вычислить скалярное произведение двух векторов;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора.

Вариант	Векторы	Смешанное произведение	Модуль векторн произвед.	Скалярное произвед	Коллинеарны или перпенд.к векторов	Компланарность векторов
1	$a=2i-3j+k,$ $b=j+4k,$ $c=5i+2j-3k$	$a,3b,c$	$3a,2c$	$b,-4c$	$a,\ c$	$a,2b,3c$
2	$a=3i+4j+k,$ $b=i-2j+7k,$ $c=-3i-6j+21k$	$5a,2b,c$	$4b,2c$	a,c	b,c	$2a,-3b,c$
3	$a=2i-4j-2k,$ $b=7i+3j,$ $c=3i+5j-7k$	$a,2b,3c$	$3a,-7в$	$-2a,c$	a,c	$3a,2b,3c$
4	$a=-7i+2k,$ $b=2i-6j+4k,$ $c=i-j+2k$	$a,-2b,-7c$	$4b,3c$	$2a,-7c$	b,c	$2a,4b,3c$
5	$a=-4i+2j-k,$ $b=3i+5j-2k,$ $c=j+5k$	$a,\ 6b,3c$	$a,2b$	$a,-4c$	a,b	$a,6b,3c$
6	$a=3i-2j+k,$ $b=2j-3k,$ $c=-3i+2j-k$	$a,-3b,\ 2c$	$5a,3c$	$-2a,4b$	$a,\ c$	$5a,4b,3c$
7	$a=i-j+3k,$ $b=2i+3j-5k,$ $c=7i+2j+4k$	$7a,-4b,2c$	$3a,\ 5c$	$2b,4c$	b,c	$7a,2b,5c$
8	$a=4i+2j-3k,$ $b=2i+k,$ $c=-12i-6j+$	$2a,\ 3b,\ c$	$4a,3b$	$b,-4c$	a,c	$2a,3b,-4c$

9	$a=-i+5k,$ $b=-3i+2j+2$ $c=-2i-4j+i$	$3a,-4b,2c$	$7a,-3c$	$2b,3a$	$в,c$	$7a,2b,-3c$
10	$a=6i-4j+6k,$ $b=9i-6j+9k,$ $c=i-8k$	$2a,-4b,3c$	$3b,-9c$	$3a,-5c$	a,b	$3a,-4b,-9c$
11	$a=5i-3j+4k,$ $b=2i-4j-2k,$ $c=3i+5j-7k$	$a,-4b,2c$	$-2b,4c$	$-3a,6c$	b,c	$a,-2b,6c$
12	$a=-4i+3j-7$ $b=4i+6j-2k$ $c=6i+9j-3k$	$-2a,b,-2c$	$4b,7c$	$5a,-3b$	b,c	$-2a,4b,7c$
13	$a=-5i+2j-2k$ $b=7i-5k,$ $c=2i+3j-2k$	$2a,4b,-5c$	$-3b,11c$	$8a,-6c$	a,c	$8a,-3b,11c$
14	$a=-4i-6j+2k,$ $b=2i+3j-k,$ $c=-i+5j-3k$	$5a,7b,2c$	$-4b,11a$	$3a,-7c$	a,b	$3a,7b,-2c$
15	$a=-4i+2j-3$ $b=-3j+5k,$ $c=6i+6j-4$	$5a,-b,3c$	$-7a,4c$	$3a,9b$	a,c	$3a,-9b,4c$
16	$a=-3i+8j,$ $b=2i+3j-2k,$ $c=8i+12j-8k$	$4a,-6b,5c$	$-7a,9c$	$3b,-8c$	b,c	$4a,-6b,9c$
17	$a=2i-4j-2k$ $b=-9i+2k,$ $c=3i+5j-7k$	$7a,5b,-c$	$-5a,4b$	$3b,-8c$	a,c	$7a,5b,-c$
18	$a=9i-3j+k,$ $b=3i-15j+2$ $c=i-5j+k$	$2a,-7b,3c$	$-6a,4c$	$5b,7a$	b,c	$2a,-7b,4c$
19	$a=-2i+4j-3$ $b=5i+j-2k,$ $c=7i+4j-k$	$a,-6b,2c$	$-8b,5c$	$-9a,7c$	a,b	$a,-6b,5c$
20	$a=-9i+4j-5$ $b=i-2j+4k,$ $c=-5i+10j-$	$-2a,7b,5c$	$-6b,7c$	$9a,4c$	b,c	$-2a,7b,4c$
21	$a=2i-7j+5k,$ $b=-i+3j-6k,$ $c=3i+2j-4k$	$-3a,6b,-c$	$5b,3c$	$7a,-4b$	b,c	$7a,-4b,3c$
22	$a=7i-4j-5k,$ $b=i-11j+3k,$ $c=5i+5j+3k$	$3a,-7b,2c$	$2b,6c$	$-4a,-5c$	a,c	$-4a,2b,6c$
23	$a=4i-6j-2k$ $b=-2i+3j+k$ $c=3i-5j+7k$	$6a,3b,8c$	$-7b,6a$	$-5a,4c$	a,b	$-5a,3b,4c$

24	$a=3i-j+2k,$ $b=-i+5j-4k$ $c=6i-2j+4k$	$4a,-7b,-2c$	$6a,-4c$	$-2a,5b$	$a,\ c$	$6a,-7b,-2c$
25	$a=-3i-j-5k,$ $b=2i-4j+8k,$ $c=3i+7j-k$	$2a,-b,3c$	$-9a,4c$	$5b,-6c$	b,c	$2a,5b,-6c$
26	$a=-3i+2j+7k$ $b=i-5k,$ $c=6i+4j-k$	$-2a,b,7c$	$5a,-2c$	$3b,c$	$a,\ c$	$-2a,3b,7c$
27	$a=3i-j+5k,$ $b=2i-4j+6k$ $c=i-2j+3k$	$-3a,4b,-5c$	$6b,3c$	$a,4c$	b,c	$-3a,4b,-5c$
28	$a=4i-5j-4k,$ $b=5i-j,$ $c=2i+4j-3k$	$a,7b,-2c$	$-5a,4b$	$8c,-3a$	$a,\ c$	$-3a,4b,8c$
29	$a=-9i+4k,$ $b=2i-4j+6k,$ $c=3i-6j+9k$	$3a,-5b,-4c$	$6b,2c$	$-2a,8c$	b,c	$3a,6b,-4c$
30	$a=5i-6j-k,$ $b=4i+8j-7k,$ $c=3j-4k$	$5a,3b,-4c$	$4b,a$	$7a,-2c$	a,b	$5a,4b,-2c$

Ответы

Вариант	а) Смешанное произведение	б) Модуль векторн произвед.	в) Скалярное произвед	**Вариант**	а) Смешанное произведение	б) Модуль векторн произвед.	в) Скалярное произвед
1.	-261	$\sqrt{19116}$	40	**16.**	0	$252\sqrt{917}$	-1632
2.	0	0	6	**17.**	-10430	$\sqrt{40389}$	984
3.	-1840	$\sqrt{612108}$	0	**18.**	0	$\sqrt{3365604}$	3255
4.	0	0	42	**19.**	1068	$\sqrt{478400}$	-315
5.	-2538	$\sqrt{3192}$	12	**20.**	0	$\sqrt{52611300}$	6660
6.	0	0	56	**21.**	2196	$\sqrt{126900}$	1288
7.	-4480	$\sqrt{78750}$	0	**22.**	28728	$\sqrt{870912}$	0
8.	0	$\sqrt{17280}$	60	**23.**	0	0	-560
9.	-1680	$\sqrt{219177}$	78	**24.**	0	0	160
10.	0	$\sqrt{6488829}$	630	**25.**	0	$\sqrt{2519424}$	900
11.	-464	$\sqrt{127488}$	504	**26.**	0	$10\sqrt{2997}$	33
12.	0	0	-240	**27.**	0	0	80
13.	4360	$33\sqrt{682}$	0	**28.**	2114	$20\sqrt{857}$	0
14.	0	0	682	**29.**	0	0	-144
15.	-1170	$56\sqrt{638}$	567	**30.**	11940	$4\sqrt{9933}$	28

2. Вершины пирамиды находятся в точках A, B, C и D. Вычислить:
а) площадь указанной грани;
б) объем пирамиды ABCD.

Ответы

Вариант	Координаты вершины A	Координаты вершины B	Координаты вершины C	Координаты вершины Д	Грань а)	Ответ а)	Ответ б)
1	A(3, 4, 5)	B(1, 2, 1)	C(-2, -3, 6)	D(3, -6, -3)	ACD	$\sqrt{2114}$	42
2	A(-7, -5, 6)	B(-2, 5, -3)	C(3, -2, 4)	D(l, 2, 2)	BCD	$\sqrt{1350}$	82/3
3	A(1, 3, 1)	B(-1, 4, 6)	C(-2, -3, 4)	D(3, 4, -4)	ACD	$\frac{\sqrt{891}}{2}$	3
4	A(2, 4, 1)	B(-3, -2, 4)	C(3, 5, -2)	D(4, 2, -3)	ABD	$\sqrt{395}$	25/3
5	A(-5, -3, -4)	B(1, 4, 6)	C(3, 2, -2)	D(8, -2, 4)	ACD	$\frac{\sqrt{6137}}{2}$	304/3
6	A(3, 4, 2)	B(-2, 3, -5)	C(4, -3, 6)	D(6, -5, 3)	ABD	$8\sqrt{26}$	40
7	A(-4, 6, 3)	B(3, -5, 1)	C(2, 6, -4)	D(2, 4, -5)	ACD	$\sqrt{94}$	70/3
8	A(7, 5, 8)	B(-4, -5, 3)	C(2, -3, 5)	D(5, 1, -4)	BCD	$5\sqrt{46}$	202/3
9	A(3, -2, 6)	B(-6, -2, 3)	C(1, 1, -4)	D(4, 6, -7)	ABD	$\sqrt{4050}$	52
10	A(-5, -4, -3)	B(7, 3, -1)	C(6, -2, 0)	D(3, 2, -7)	BCD	$\frac{\sqrt{1422}}{2}$	42
11	A(3, -5, -2)	B(-4, 2, 3)	C(1, 5, 7)	D(-2,-4, 5)	ACD	$\frac{\sqrt{6986}}{2}$	202/3
12	A(7, 4, 9)	B(1, -2, -3)	C(-5, -3, 0)	D(1, -3, 4)	ABD	$3\sqrt{131}$	50
4	A(-4, -7, -3)	B(-4, -5, 7)	C(2, -3, 3)	D(3, 2, 1)	BCD	$2\sqrt{69}$	148/3
14	A(-4, -5, -3)	B(3, 1, 2)	C(5, 7, -6)	D(6, -1, 5)	ACD	$3\sqrt{809}$	110
15	A(5, 2, 4)	B(-3, 5, -7)	C(1, -5, 8)	D(9, -3, 5)	ABD	$2\sqrt{299}$	286/3
16	A(-6, 4, 5)	B(5, -7, 3)	C(4, 2, -8)	D(2, 8, -3)	ACD	$10\sqrt{117}$	150
17	A(5, 3, 6)	B(-3, -4, 4)	C(5, -6, 8)	D(4, 0, -3)	BCD	$\sqrt{2294}$	332/3
18	A(5, -4, 4)	B(-4, -6, 5)	C(3, 2, -7)	D(6, 2, -9)	ABD	$6\sqrt{115}$	82/3
19	A(-7, -6, -5)	B(5, 1, -3)	C(8, -4, 0)	D(3, 4, -7)	BCD	$\frac{\sqrt{158}}{2}$	86/3
20	A(7, -1, -2)	B(1, 7, 8)	C(3, 7, 9)	D(-3, -5, 2)	ACD	$\sqrt{5957}$	124/3
21	A(5, 2, 7)	B(7, -6, -9)	C(-7, -6, 3)	D(l, -5, 2)	ABD	$\sqrt{3194}$	76
22	A(-2, -5, -1)	B(-6, -7, 9)	C(4, -5, 1)	D(2, 1, 4)	BCD	$\sqrt{1802}$	226/3
23	A(-6, -3, -5)	B(5, 1, 7)	C(3, 5, -1)	D(4, -2, 9)	ACD	$\frac{\sqrt{24101}}{2}$	4/3
24	A(7, 4, 2)	B(-5, 3, -9)	C(1, -5, 3)	D(7, -9, 1)	ABD	$\sqrt{11161}$	186
25	A(-8, 2, 7)	B(3, -5, 9)	C(2, 4, -6)	D(4, 6, -5)	ACD	$2\sqrt{146}$	296/3
26	A(4, 3, 1)	B(2, 7, 5)	C(-4, -2, 4)	D(2, -3, -5)	ACD	$7\sqrt{34}$	80/3
27	A(-9, -7, 4)	B(-4, 3, -1)	C(5, -4, 2)	D(3, 4, 4)	BCD	$\sqrt{1346}$	120
28	A(3, 5, 3)	B(-3, 2, 8)	C(-3, -2, 6)	D(7, 8, -2)	ACD	$5\sqrt{11}$	26/3
29	A(4, 2, 3)	B(-5, -4, 2)	C(5, 7, -4)	D(6, 4, -7)	ABD	$\sqrt{3086}$	178/3
30	A(-4, -2, -3)	B(2, 5, 7)	C(6, 3, -1)	D(6, -4, 1)	ACD	$\frac{\sqrt{6641}}{2}$	116

Контрольные вопросы

1. Как вычисляется скалярное произведение векторов, заданных своими координатами?

2. Как вычисляется векторное произведение векторов?

3. Что называется смешанным произведением векторов?

4. Какие векторы называются компланарными?

Практическая работа № 8

Составление уравнений прямых и их построение

Цель: Проверить знания и умения по составлению уравнений прямых: по двум точкам, расположенных перпендикулярно и параллельно данной прямой. Построение прямой.

Задание

1. Даны вершины треугольника АВС: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ **Найти:**

а) уравнение стороны АВ;

б) уравнение высоты СН;

в) уравнение медианы АМ;

г) точку N пересечения медианы АМ и высоты СН;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину С параллельно стороне АВ;

е) расстояние от точки С до прямой АВ.

Варианты	$A(x_1, y_1)$	$B(x_2, y_2)$	$C(x_3, y_3)$	Ответ а)	Ответ е)
1	A (-2, 4)	B (3, 1)	C (10, 7)	$y = -6{,}6x + 2{,}8$	10,5
2	A (-3, -2)	B (14, 4)	C (6, 8)	$y = \frac{6}{17}x - \frac{16}{17}$	$110/\sqrt{53} \approx 15{,}1$
3	A (1, 7)	B (-3, -1)	C (11, -3)	$y = 2x + 5$	13,4
4	A (1, 0)	B (-1, 4)	C (9, 5)	$y = -2x + 2$	9,4
5	A (1, -2)	B (7, 1)	C (3, 7)	$y = 0{,}5x + 2{,}5$	2,7
6	A (-2, -3)	B (1, 6)	C (6, 1)	$y = 3x + 3$	$2\sqrt{10} \approx 0{,}63$
7	A (-4, 2)	B (-6, 6)	C (6, 2)	$y = 2x + 5$	$3\sqrt{5} \approx 1{,}4$
8	A (4, -3)	B (7, 3)	C (1, 10)	$y = 2x - 11$	$19/\sqrt{5} \approx 8{,}6$
9	A (4, -4),	B (8, 2)	C (3, 8)	$y = 1{,}5x - 10$	$13{,}5/\sqrt{3{,}25} \approx 7{,}5$
10	A (-3, -3)	B (5, -7)	C (7, 7)	$y = -0{,}5x - 4{,}5$	$15/\sqrt{1{,}25} \approx 13{,}6$
11	A (1, -6)	B (3, 4)	C (-3, 3)	$y = 5x - 11$	$29/\sqrt{26} \approx 5{,}8$
12	A (-4, 2)	B (8, -6)	C (2, 6)	$y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$	$9/\sqrt{1.16} \approx 9$
13	A (-5, 2)	B (0, -4)	C (5, 7)	$y = 0{,}4x - 4$	$45\sqrt{29}/29 \approx 8.4$
14	A (4, -4)	B (6, 2)	C (-1, 8)	$y = 3x - 16$	$27/\sqrt{10} \approx 8.5$
15	A (-3, 8)	B (-6, 2)	C (0,-5)	$y = 2x + 14$	$3.8\sqrt{5} \approx 8.5$
16	A (6, -9)	B (10, -1)	C (-4, 1)	$y = 2x - 21$	$30/\sqrt{5} \approx 13.4$
17	A (4, 1)	B (-3, -1)	C (7, -3)	$y = \frac{2}{7}x - \frac{1}{7}$	$34/\sqrt{53} \approx 4{,}7$
18	A (-4, 2)	B (6, -4)	C (4, 10)	$y = 0{,}6x - 0{,}4$	$20\sqrt{34}/17 \approx 6.9$
19	A (3, -1)	B (11, 3)	C (-6, 2)	$y = 0{,}5x - 2{,}5$	$7{,}5/\sqrt{1{,}25} \approx 6{,}7$
20	A (-7, -2)	B (-7, 4)	C (5, -5)	$x = -7$	12
21	A (-1, -4)	B (9, 6)	C (-5, 4)	$y = x - 3$	8
22	A (10, -2)	B (4, -5)	C (-3, 1)	$y = 0{,}5x - 7$	$3.8\sqrt{5} \approx 8.5$

23	A (-3, -1)	B (-4, -5)	C (8, 1)	$y = 4x + 11$	$42\sqrt{17}/17 \approx 10.2$
24	A (-2, -6)	B (-3, 5)	C (4, 0)	$y = -11x - 28$	$36\sqrt{122}/61 \approx 6.5$
25	A (-7, -2)	B (3, -8)	C (-4, 6)	$y = 0{,}5x - 2{,}5$	$4{,}2\sqrt{5} \approx 9{,}4$
26	A (0, 2)	B (-7, -4)	C (3, 2)	$y = -0{,}6x - 6{,}2$	$25\sqrt{34}/17 \approx 8.6$
27	A (7, 0)	B (1, 4)	C (-8, -4)	$y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$	$42/\sqrt{13} \approx 11{,}7$
28	A (1, -3)	B (0, 7)	C (-2, 4)	$y = -10x + 7$	$23\sqrt{101}/101 \approx 2.3$
29	A (-5, 1)	B (8, -2)	C (1, 4)	$y = -\frac{3}{13}x - \frac{2}{13}$	$57/\sqrt{78} \approx 4{,}3$
30	A (2, 5)	B (-3, 1)	C (0, 4)	$y = 0{,}8x + 3{,}4$	$3\sqrt{41}/41 \approx 0.5$

2. Решить следующие задачи

2.1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых 3x - 2y - 7 = 0 и x + 3y - 6 = 0 и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3. $Ответ: x = 3$

2.2. Найти проекцию точки A(-8, 12) на прямую, проходящую через точки B(2, -3) и C(-5,1). $Ответ: A_1(-12,5)$

2.3. Даны две вершины треугольника ABC: A(-4, 4), B(4, -12) и точка M(4, 2) пересечения его высот. Найти вершину C. $Ответ: C(8,4)$

2.4.Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой 2y - x = 3. $Ответ: x - 2y + 4 = 0$

2.5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(2, -3) и точку пересечения прямых 2x - y = 5 и x + y = 1. $Ответ: x = 2$

2.6. Доказать, что четырехугольник ABCD - трапеция, если A(3, 6), B(5, 2), C(-1, -3), D(5,5).

2.7. Записать уравнение прямой, проходящей через точку A(3, 1) перпендикулярно к прямой BC, если B(2, 5), C(1, 0). $Ответ: x + 5y - 8 = 0$

2.8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(-2, 1) параллельно прямой MN, если M(-3, -2), N(1, 6). $Ответ: 2x - y + 5 = 0$

2.9. Найти точку, симметричную точке M(2, -1) относительно прямой x - 2y + 3 = 0.
$Ответ: M_1\left(-\frac{4}{5}; \frac{23}{5}\right)$

2.10. Найти точку O пересечения диагоналей четырехугольника ABCD, если A(-1, -3), B(3, 5), C(5,2), D(3, -5). $Ответ: MO\left(3; \frac{1}{3}\right)$

2.11. Через точку пересечения прямых 6x - 4y + 5 = 0, 2x+ 5y + 8 = 0 провести прямую, параллельную оси абсцисс. $Ответ: y = -1$

2.12. Известны уравнения стороны AB треугольника ABC 4x + y = 12, его высот BH 5x - 4y = 12 и AMx + y = 6. Найти уравнения двух других сторон треугольника ABC.
$Ответ: 7x - 7y - 16 = 0;\ 4x + 5y - 28 = 0$

2.13. Даны две вершины треугольника ABC: A(-6, 2), B(2, -2) и точка пересечения его высот H(1,2). Найти координаты точки M пересечения стороны AC и высоты BH.
$Ответ: M\left(\frac{10}{17}; \frac{62}{17}\right)$

2.14. Найти уравнения высот треугольника ABC, проходящих через вершины A и B, если A(-4, 2), B(3, -5), C(5, 0). $Ответ: 7x + 5y + 2 = 0;\ 9x + 2y - 28 = 0$

2.15. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника, вершинами которого служат точки A(2, 3), B(0, -3), C(6,3).

$Ответ: M\left(3;-\frac{2}{3}\right)$

2.16. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину A треугольника ABC, зная уравнения его сторон: AB - 2x - y - 3 = 0, AC -x + 5y - 7 = 0, BC - 3x - 2y + 13 = 0.
$Ответ: 2x+3y-7=0;$

2.17. Дан треугольник с вершинами A(3, 1), B(-3, -1) и C(5, -12). Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C.

$Ответ: 2x+y+2=0; \quad d=\frac{54}{\sqrt{17}}\approx 13{,}1$

2.18. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых 2x + 5y - 8 = 0 и 2x + 3y + 4 = 0. $Ответ: 6x+11y=0;$

2.19. Найти уравнения перпендикуляров к прямой 3x + 5y - 15 = 0, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.
$Ответ: 5x-3y-25=0; \quad 5x+3y+9=0;$

2.20. Даны уравнения сторон четырехугольника: x - y = 0, x + 3y = 0, x - y - 4 = 0, 3x + y - 12 = 0. Найти уравнения его диагоналей. $Ответ: y=0; \quad x=3$

2.21. Составить уравнения медианы CM и высоты CK треугольника ABC, если A(4, 6), B(-4, 0), C(-1, -4). $Ответ: 7x-y+3=0-CM; \quad 4x+3y+16=0-CK$

2.22. Через точку P(5, 2) провести прямую: а) отсекающую равные отрезки на осях координат; б) параллельную оси Ox; в) параллельную оси Oy.
$Ответ: x+y-7=0; \quad y=2; \quad x=5$

2.23. Записать уравнение прямой, проходящей через точку A(-2, 3) и составляющей с осью Ox угол: а) 45°, б) 90°, в) 0°. $Ответ: x-y+5=0-CM; \quad x+2=0; \quad y-3=0$

2.24. Какую ординату имеет точка C, лежащая на одной прямой с точками A(- 6, -6) и B(3, -1) и имеющая абсциссу, равную 3? $Ответ: y=9$

2.25. Через точку пересечения прямых 2x - 5y - 1 = 0 и x + 4y - 7 = 0 провести прямую, делящую отрезок между точками A(4, -3) и B(-1, 2) в отношении = 2 / 3.
$Ответ: 2x-y-5=0;$

2.26. Известны уравнения двух сторон ромба 2x -5y - 1 = 0 и 2x - 5y - 34 = 0 и уравнение одной из его диагоналей x + 3y - 6 = 0. Найти уравнение второй диагонали.
$Ответ: 3x-y-23=0;$

2.27. Найти точку E пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки A(3,1), B(7, 5) и C(5, -3). $Ответ: E(3;1)$

2.28. Записать уравнения прямых, проходящих через точку A(-1, 1) под углом 45° к прямой 2x + 3y = 6. $Ответ: x-5y+6=0; \quad 5x+y+4=0$

2.29. Даны уравнения высот треугольника ABC 2x - 3y + 1 = 0, x + 2y + 1 = 0 и координаты его вершины A(2, 3). Найти уравнения сторон AB и AC треугольника.
$Ответ: 2x-y-1=0-AB; \quad 3x+2y-12=0-AC$

2.30. Даны уравнения двух сторон параллелограмма x - 2y = 0, x - y - 1 = 0 и точка пересечения его диагоналей M(3, -1). Найти уравнения двух других сторон.
$Ответ: x-y-7=0; \quad x-2y-10=0$

Контрольные вопросы

1. Запишите уравнения осей координат.
2. Общее уравнение прямой.
3. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.

4. Запишите уравнения прямых, параллельных осям координат.
5. Сформулируйте условие параллельности прямых.
6. Сформулируйте условие перпендикулярности прямых.
7. Как найти угол между прямыми?
8. Как найти расстояние между прямыми?

Практическая работа №9
Составление уравнений кривых второго порядка, их построение

Цель: Проверить уровень усвоения материала по составлению уравнений кривых второго порядка (окружности, эллипса, параболы, гиперболы) и их построению.

Задания

1. Составить канонические уравнения:

а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B - точки, лежащие на кривой, F - фокус, a - большая (действительная) полуось, b - малая (мнимая) полуось, ε - эксцентриситет, y=±kx - уравнения асимптот гиперболы, D - директриса кривой, 2c - фокусное расстояние).

Вариант	Эллипс	Гипербола	Парабола
1.	b = 15, F(-10, 0)	a =13, ε = 14/13	D: x = - 4
2.	b = 2, F($4\sqrt{2}$, 0)	a = 7, ε = $\sqrt{85}/7$	D: x = 5
3.	A(3, 0), B(2, $\sqrt{5}/3$)	k = 3/4, ε = 5/4	D: y = - 2
4.	ε = $\sqrt{21}/5$, A(-5, 0)	A($\sqrt{80}$, 3), B($4\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$)	D: y = 1
5.	2a = 22, ε = $\sqrt{57}/11$	k = 2/3, 2c = $10\sqrt{13}$	ось симметрии Ox и A(27, 9).
6.	b = $\sqrt{15}$, ε = $\sqrt{10}/25$	k = 3/4, 2a = 16	ось симметрии Ox и A(4, -8).
7.	a = 4, F = (3, 0)	b = $2\sqrt{10}$, F(-11, 0)	D: x = -2
8.	b = 4, F = (9, 0)	a = 5, ε = 7/5	D: x = 6
9.	A(0, $\sqrt{3}$), B($\sqrt{14/3}$,1)	k = $\sqrt{21}/10$, ε = 11/10	D: y = -4
10.	ε = 7/8, A(8,0)	A(3, $-\sqrt{3/5}$), B($\sqrt{13/5}$,6)	D: y = 4
11.	2a = 24, ε = $\sqrt{22}/6$	k = $\sqrt{2/3}$, 2c =10	ось симметрии Ox и A(-7, -7).
12.	b = 2, ε = $5\sqrt{29}/29$	k =12/13, 2a = 26	ось симметрии Ox и A(-5, 15).
13.	a = 6, F(-4, 0)	b = 3, F(7, 0)	D: x = -7
14.	b = 7, F(5, 0)	a = 11, ε = 12/11	D: x = 10.
15.	A($-\sqrt{17/3}$, 1/3), B($\sqrt{21}/2$, 1/2);	k =1/2, ε = $\sqrt{5}/2$	D: y = -1
16.	ε = 3/5, A(0, 8)	A($\sqrt{6}$, 0), B($-2\sqrt{2}$, l)	D: y = 9
17.	2a = 22, ε = 10/11	k = $\sqrt{11}/5$, 2c=12	ось симметрии Ox и A(-7, 5).

18.	b = 5, ε = 12/13	k = 1/3, 2a = 6	ось симметрии Oy и A(-9, 6).
19.	a = 9, F(7, 0)	b = 6, F(12, 0)	D: x = -1/4
20.	b = 5, F(-10, 0)	a = 9, ε = 4/3	D: x = 12
21.	A(0, -2), B($\sqrt{15}/2$, 1)	k = $2\sqrt{10}/9$, ε =11/9	D: y = 5
22.	ε = 2/3, A(-6, 0)	A($\sqrt{8}$, 0), B($\sqrt{20}/3$, 2)	D: y = 1
23.	2a = 50, ε = 3/5	k = $\sqrt{29}/14$, 2c = 30	ось симметрии Oy и A(4, 1).
24.	b = $2\sqrt{15}$, ε = 7/8	k = 5/6, 2a = 12	ось симметрии Oy и A(-2, $3\sqrt{2}$).
25.	a =13, F(-5, 0)	b = 44, F(-7, 0)	D: x = -3/8
26.	b = 7, F(13, 0)	b = 4, F(-11, 0)	D: x = 13
27.	A(-3, 0), B(1, $\sqrt{40}/3$)	k = $\sqrt{2/3}$, ε = $\sqrt{15}/3$	D: y = 4
28.	ε = 5/6, A(0, $\sqrt{11}$)	A($\sqrt{32/3}$, 1), B($\sqrt{8}$, 0)	D: y = -3
29.	2a = 30, ε = 17/15	k = $\sqrt{17}/8$, 2c =18	ось симметрии Oy и A(4, -10)
30.	b = $2\sqrt{2}$, ε = 7/9	k = $\sqrt{2}/2$, 2a = 12	ось симметрии Oy и A(-45, 15).

2. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке A.

2.1. Вершины гиперболы $12x^2 - 13y^2 = 156$, A(0, -2).
2.2. Вершины гиперболы $4x^2 – 9y^2 = 36$, A(0, 4).
2.3. Фокусы гиперболы $24y^2 – 25x^2 = 600$, A(0, -8).
2.4. O(0, 0), A - вершина параболы $y^2 = 3(x - 4)$. *Ответ*: $(x-4)^2 + y^2 = 16$
2.5. Фокусы эллипса $9x^2 + 25y^2 = 1$, A(0, 6).
2.6. Левый фокус гиперболы $3x^2 – 4y^2 = 12$, A(0, -3).
2.7. Фокусы эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$, A - его верхняя вершина.
2.8. Вершину гиперболы $x^2 - 16y^2 = 64$, A(0, -2).
2.9. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 80$, A(0, -4).
2.10. O(0, 0), A - вершина параболы $y^2 = -(x +5)/2$.
2.11. Правый фокус эллипса $33x^2 + 49y^2 = 1617$, A(1, 7).
2.12. Левый фокус гиперболы $3x^2 - 5y^2 = 30$, A(0, 6).
2.13. Фокусы эллипса $16x^2 - 41y^2 = 656$, A - его нижняя вершина.
2.14. Вершину гиперболы $2x^2 - 9y^2 = 18$, A(0, 4).
2.15. Фокусы гиперболы $5x^2 - 11y^2 = 55$, A(0, 5).
2.16. B(1, 4), A - вершина параболы $y^2 = (x - 4)/3$.
2.17. Левый фокус эллипса $3x^2 + 7y^2 = 21$, A(-1, -3).
2.18. Левую вершину гиперболы $5x^2 – 9y^2 = 45$, A(0, -6).
2.19. Фокусы эллипса $24x^2 – 25y^2 = 600$, A - его верхняя вершина.
2.20. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 16y^2 - 48$, A(1, 3).
2.21. Левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$, A(-1, -2).
2.22. B(2, -5), A - вершина параболы $x^2 = -2(y + 1)$.
2.23. Правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$, A(2, -7).
2.24. Правую вершину гиперболы $40x^2 - 81y^2 = 3240$, A(-2, 5).
2.25. Фокусы эллипса $x^2 + 10y^2 = 90$, A - его нижняя вершина.

2.26. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 25y^2 = 75$, A(-5, -2).
2.27. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$, A(0, -6).
2.28. B(3, 4), A - вершина параболы $y^2 = (x + 7)/4$.
2.29. Левый фокус эллипса $13x^2 + 49y^2 = 837$, A(1, 8).
2.30. Правый фокус гиперболы $57x^2 - 64y^2 = 3648$, A(2, 8).

3. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет заданным условиям.

3.1. Отстоит от прямой x = -6 на расстоянии, в два раза большем, чем от точки A(1, 3).
3.2. Отстоит от прямой x= -2 на расстоянии, в два раза большем, чем от точки A(4, 0).
3.3. Отстоит от прямой y = -2 на расстоянии, в три раза большем, чем от точки A(5, 0).
3.4. Отношение расстояний от точки M до точек A(2, 3) и B(-1, 2) равно 3/4.
3.5. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек A(4, 0) и B(-2, 2) равна 28.
3.6. Отстоит от точки A(1, 0) на расстоянии, в пять раз меньшем, чем от прямой x = 8.
3.7. Отстоит от точки A(4, 1) на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки B (-2, -1).
3.8. Отстоит от прямой x = -5 на расстоянии, в три раза большем, чем от точки A(6, 1).
3.9. Отстоит от прямой y = 7 на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки A(4, -3).
3.10. Отношение расстояний от точки M до точек A(-3, 5) и B(4, 2) равно 1/3.
3.11. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек A(-5, -1) и B(3, 2) равна 40,5.
3.12. Отстоит от точки A(2, 1) на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой x = -5.
3.13. Отстоит от точки A(-3, 3) на расстоянии, в три раза большем, чем от точки B(5, 1).
3.14. Отстоит от прямой x = 8 на расстоянии, в два раза большем, чем от точки A(-1, 7).
3.15. Отстоит от прямой x = 9 на расстоянии, в четыре раза меньшем, чем от точки A(-1, 2).
3.16. Отношение расстояний от точки M до точек A(2, -4) и B(3, 5) равно 2/3.
3.17. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек A(-3, 3) и B(4, 1) равна31.
3.18. Отстоит от точки A(0, -5) на расстоянии, в два раза меньшем, чем от прямой x = 3.
3.19. Отстоит от точки A(4, -2) на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки B(1, 6).
3.20. Отстоит от прямой x = - 7 на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки A(1, 4).
3.21. Отстоит от прямой x = 14 на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки A(2, 3).
3.22. Отношение расстояний от точки M до точек A(3, -2) и B(4, 6) равно 3/5.
3.23. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек A (-5, 3) и B (2, -4) равна 65.
3.24. Отстоит от точки A(3, -4) на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой x = 5.
3.25. Отстоит от точки A(5, 7) на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки B(-2,1).
3.26. Отстоит от прямой x = 2 на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки A (4, -3).
3.27. Отстоит от прямой x = -7 на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки A (3, 1).
3.28. Отношение расстояний от точки M до точек A (3, -5) и B (4, 1) равно 1/4.
3.29. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек A(-1, 2) и B (3, -1) равна 18,5.
3.30. Отстоит от точки A(1, 5) на расстоянии, в четыре раза меньшем, чем от прямой x=-1

Контрольные вопросы

1. Запишите каноническое уравнение эллипса.
2. Запишите каноническое уравнение гиперболы.
3. Запишите каноническое уравнение параболы.
4. Что называется эксцетриситетом эллипса?
5. Запишите уравнения асимптот гиперболы.

Самостоятельная работа

Вариант 1

Даны векторы $\vec{a}(9;-2;1)$ и $\vec{b}(4;3;0)$ (для № 1-5).

7. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$.*(Ответ: 24)*

8. Найти $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$. Ответ: $\left(\frac{24}{5\sqrt{86}}\right)$

9. Найти $\vec{a}^2$.*(Ответ: 86)*

10. Найти $\left|\vec{b}\right|$.*(Ответ: 5)*

11. Найти координаты векторов $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{f} = -3\vec{a}$.(*Ответ*: $c(13;1;1)$, $d(5;-5;1)$, $f(-27;6,0)$)

12. В прямоугольной декартовой системе координат построить точки *A* (0; 0), *B* (3; -4), *C* (-3; 4). Определить расстояние между точками *A* и *B*, *B* и *C*, *A* и *C*.(*Ответ:* $|AB| = 5$, $|BC| = 10$, $|AC| = 5$)

Вариант 2

Даны векторы $\vec{a}(-3;2;1)$ и $\vec{b}(3;0;4)$ (для № 1-5).

7. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$.*(Ответ:-5)*

8. Найти $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$.(*Ответ:* $-\frac{1}{\sqrt{14}}$)

9. Найти $\vec{a}^2$.*(Ответ: 14)*

10. Найти $\left|\vec{b}\right|$.(*Ответ: 5*)

11. Найти координаты векторов $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{f} = -3\vec{a}$.(*Ответ:* $c(0;2;5)$, $d(-6;2;-3)$, $f(9;-6,-3)$)

12. В прямоугольной декартовой системе координат построить точки *A* (0; 0), *C* (-3; 4), *D* (-2; 2) *E* (10; -3). Определить расстояние между точками *C* и *D*, *A* и *D*, *D* и *E*.. (*Ответ:* $|CD| = \sqrt{5}$, $|AD| = 2\sqrt{2}$, $|DE| = 13$)

Тест для самоконтроля по теме «Векторная алгебра»

1. Даны векторы $\vec{a} = (2;4;1)$ и $\vec{c} = (1;2;0)$. Найти координаты суммы векторов.

a) $(3;6;1)$ *b*) $(0;6;1)$ *c*) $(1;2;1)$

2. Даны векторы $\vec{a} = (2;4;1)$ и $\vec{c} = (1;2;0)$. Найти координаты разности векторов.

a) $(3;6;1)$ *b*) $(0;6;1)$ *c*) $(1;2;1)$

3. Даны векторы $\vec{a} = (2;4;1)$ и $\vec{c} = (1;2;0)$. Найти координаты вектора $\vec{a} + 2\vec{c}$.

a) $(-3;8;1)$ *b*) $(4;8;1)$ *c*) $(1;2;1)$

4. Найти координаты вектора $A\vec{B}$, если $A(2;\ 4;\ -6)$ и $B(2;\ -4;\ 8)$

a) $(0;\ -4;\ 7)$ *b*) $(2;\ -4;\ 2)$ *c*) $(0;\ 4;\ -7)$

5. Найти длину вектора $\vec{a}(-1;\ 2;\ -2)$

a) 4 b) 3 c) 1

6. Найти длину вектора $A\vec{B}$, если $A(5;\ 3;\ 1)$ и $B(4;\ 5;\ -1)$

a) 3 b) 2 c) 1

7. Условие коллинеарности векторов $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ имеет вид:

a) $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ *b*) $x_1x_2 = y_1y_2 = z_1z_2$ *c*) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = m$

8. Укажите вектор, коллинеарный вектору $\vec{a}(2;\ -3;\ -1)$

a) $\vec{b}\,(6;-9;-3)$ *b*) $\vec{b}\,(8;12;-4)$ *c*) $\vec{b}\,(-4;6;-2)$

9. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}(4;-3;1)$ и $\vec{b}\,(5;-2;-3)$

a) 3 b) 12 c) 23

10. Найти координаты вектора $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$

a) $(1;-3;-5)$ *b*) $(-1;-3;5)$ *c*) $(-1;3;5)$

11. Условие перпендикулярности векторов $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ имеет вид:

a) $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$ *b*) $x_1x_2=y_1y_2=z_1z_2$ *c*) $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=m$

12. При каком значении m векторы $\vec{a}(1;3;-2)$ и $\vec{b}\,(-1;m;4)$ векторы перпендикулярны?

a) 5 b) 3 c) -3

13. Вершинами треугольника служат точки $A(10;-2;8)$, $B(8;0;7)$ и $C(10;2;8)$. Найти длину стороны AB.

a) 4 b) 3 c) 1

14. Вершинами треугольника служат точки $A(10;-2;8)$, $B(8;0;7)$ и $C(10;2;8)$. Найти длину стороны AC.

a) 4 b) 3 c) 1

15. Найти координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$ и $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$

a) $(1;5;-1)$ *b*) $(5;-1;-9)$ *c*) $(-1;3;5)$

16. Найти координаты вектора $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$ и $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$

a) $(1;5;-1)$ *b*) $(5;-1;-9)$ *c*) $(-1;3;5)$

17. Найти угол между векторами $\vec{a}(2;2;-1)$ и $\vec{b}\,(-3;6;6)$

a) 45° *b*) 60° *c*) 90°

18. Даны точки $A(3;5;6)$ *и* $B(5;-1;0)$. Найти координаты середины отрезка AB

a) $(4;2;3)$ *b*) $(5;-2;2)$ *c*) $(-4;2;-3)$

Тест для самоконтроля по теме «Прямые»

1. Общее уравнение прямой имеет вид:

a) $y-y_1=k(x-x_1)$ *b*) $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ *c*) $Ax+By+C=0$

2. Необходимое и достаточное условие параллельности прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2:

a) $k_1=k_2$ *b*) $k_1\cdot k_2=-1$ *c*) $k_1+k_2=0$

3. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2:

a) $k_1=k_2$ *b*) $k_1\cdot k_2=-1$ *c*) $k_1+k_2=0$

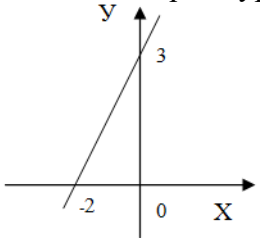
4. Расстояние от точки M_0 до прямой $Ax+By+C=0$ вычисляется по формуле:

a) $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ *b*) $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ *c*) $d=\sqrt{Ax_0+By_0+C}$

5. Укажите уравнение прямой параллельной $y=5x+6$

a) $y=-5x$ *b*) $10x-y+12=0$ *c*) $10x-2y+8=0$

6. Выберите уравнение, описывающее прямую, изображенную на рисунке



a) $-2x+3y=0$ *b*) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$ *c*) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$

7. Укажите уравнение прямой перпендикулярной прямой $y=5x+6$

a) $y=-\frac{1}{5}x$ *b*) $10x-y+12=0$ *c*) $10x-2y+8=0$

8. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат, если ее угловой коэффициент $k=5$

a) $5x+y=0$ *a*) $x+5y=0$ *c*) $5x-y=0$

9. Указать точку, принадлежащую прямой $7x-3y+21=0$

a) $A(4;13)$ *b*) $A(3;14)$ *c*) $A(-4;13)$

10. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с осью Ox угол 45°.

a) $x-y=0$ *b*) $x+y=0$ *c*) $x-y+1=0$

11. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(5;-1)$ и имеющей угловой коэффициент $k=3$.

a) $3x-y=0$ *a*) $3x+y-16=0$ *c*) $3x-y-16=0$

Тест по теме «Кривые второго порядка»

1. Уравнение эллипса имеет вид:

a) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *b*) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *c*) $y^2=2px$

2. Уравнение гиперболы имеет вид:

a) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *b*) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *c*) $y^2=2px$

3. Уравнение параболы имеет вид:

a) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *b*) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *c*) $y^2=2px$

4. Найти радиус окружности $x^2+y^2+4y-5=0$

a) 7 *b*) 3 *c*) 5

5. Чему равна большая полуось эллипса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$

a) 6 *b*) 11 *c*) 5

6. Найти эксцентриситет эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{51}=1$

a) 6 *b*) 0,3 *c*) 0,7

7. Чему равна действительная ось гиперболы $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{25}=1$

a) 6 *b*) 18 *c*) 5

8. Найти эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$

a) 14 *b*) $\frac{3}{5}$ *c*) $\frac{6}{5}$

9. Записать уравнения асимптот гиперболы $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{256}=1$

a) $y=\pm\frac{4}{3}x$ *b*) $y=\pm\frac{3}{4}x$ *c*) $y=\pm 3x$

10. Записать уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее фокус находится в точке $F(3;0)$

a) $y^2=2x$ *b*) $y^2=12x$ *c*) $y=12x^2$

11. Для гиперболы $16x^2-9y^2=144$ найти расстояние между фокусами.

a) 6 *b*) 10 *c*) 5

12. Найти координаты центра окружности $x^2+y^2-8x-10y-8=0$

a) $(4;5)$ *b*) $(5;4)$ *c*) $(2;5)$

13. Найти координаты радиус окружности $x^2+y^2-8x-10y-8=0$

a) 6 *b*) 10 *c*) 7

Раздел 3. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ (У3, З2)

Устный опрос

1. Дайте определения предела функции в точке.
2. Сформулировать свойства пределов
3. Какие типы неопределенностей вам известны?
4. Как избавиться о неопределенности $\frac{0}{0}$?
5. Чему равно значение предела функции при неопределенности $\frac{c}{0}$?
6. Чему равно значение предела функции при неопределенности $\frac{0}{c}$?
7. Сформулируйте первый и второй замечательный пределы.
8. Чему равна неопределенность вида c^{∞}?
9. Чему равна неопределенность вида $0\cdot c$?

Практическая работа № 10
Вычисление пределов, раскрытие неопределённостей

Цель: Проверить умения и навыки студентов в вычислении пределов, раскрытии неопределенностей.

Задания

Найти указанные пределы.

1.

1.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$ *ответ*: $\dfrac{1}{8}$

1.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$ *ответ*: 1

1.3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$ *ответ*: $-\dfrac{5}{27}$

1.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$ *ответ*: $\dfrac{3}{5}$

1.5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+4}{x^2-5x+6}$ *ответ: нет решения*

1.6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12+x-x^2}{x^3-27}$ *ответ: нет решения*

1.7. $\lim\limits_{x\to 1\beta}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$ *ответ*: $\dfrac{4}{9}$

1.8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$ *ответ*: $\dfrac{11}{4}$

1.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$ *ответ*: $-\dfrac{4}{3}$

1.10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$ *ответ*: 1

1.11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$ *ответ*: $\dfrac{12}{5}$

1.12. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$ *ответ*: -1

1.13. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$ *ответ*: $\dfrac{8}{9}$

1.14. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$ *ответ*: $\dfrac{13}{4}$

1.15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$ *ответ*: $\dfrac{1}{5}$

1.16. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$ *ответ*: $\dfrac{9}{4}$

1.17. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$ *ответ*: $\dfrac{6}{5}$

1.18. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+2x-2}$ *ответ*: 0

1.19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$ *ответ*: 1

1.20. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-3x+2}{x^2-x-12}$ *ответ: нет решения*

1.21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$ *ответ*: $-\dfrac{1}{7}$

1.22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$ *ответ: нет решения*

1.23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$ *ответ*: $-\dfrac{9}{11}$

1.24. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$ *ответ*: $\dfrac{9}{19}$

1.25. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$ *ответ*: $\dfrac{24}{17}$

1.26. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+3x+15}{x^2-6x-27}$ *ответ: нет решения*

1.27. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$ *ответ*: $\dfrac{4}{3}$

1.28. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$ *ответ*: $\dfrac{17}{23}$

1.29. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$ *ответ*: $\dfrac{22}{5}$

1.30. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$ *ответ*: $\dfrac{7}{8}$

2.

2.1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$ *ответ*: $\dfrac{1}{13}$

2.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-10}{x^3-1}$ *ответ: нет решения*

2.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$ *ответ*: 0

2.4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-8}$ *ответ: нет решения*

2.5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^2+x+1}{x^4+1}$ *ответ*: 0

2.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-1}{x^4-1}$ *ответ: нет решения*

2.7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+3}{5x^2+3x-3}$ *ответ*: $\dfrac{5}{23}$

2.8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$ *ответ: нет решения*

2.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ *ответ*: -2

2.10. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^3+64}$ *ответ*: $-\dfrac{3}{16}$

2.11. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11x+5}$ *ответ*: $\dfrac{7}{3}$

2.12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x-2}$ *ответ*: $\dfrac{1}{2}$

2.13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$ *ответ*: 0

2.14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$ *ответ*: -12

2.15. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{9x^2+17x-2}{x^2+2x}$ *ответ*: $\dfrac{19}{2}$

2.16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$ *ответ: нет решения*

2.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+5x}{3x^2+7x}$ *ответ*: $\dfrac{5}{7}$

2.18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^2-1}$ *ответ*: 3

2.19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+5x-1}{x^2-5x+6}$ *ответ: нет решения*

2.20. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$ *ответ*: $-\dfrac{11}{75}$

2.21. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$ *ответ*: $\dfrac{11}{48}$

2.22. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{x^2-1/4}$ *ответ*: 6

2.23. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^2-4x}$ *ответ*: $\dfrac{11}{4}$

2.24. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+11x+10}{x^2-5x+14}$ *ответ*: 0

2.25. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+x-10}$ *ответ*: $\dfrac{4}{11}$

2.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{4x^2-5x+1}$ *ответ*: 0

2.27. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12}$ *ответ*: $\dfrac{13}{16}$

2.28. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+2x-24}{2x^3+15x+18}$ *ответ*: 0

2.29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-4}{x^2-11x+18}$ *ответ*: $-\dfrac{10}{7}$

2.30. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$ *ответ*: $\dfrac{48}{29}$

3.

3.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$

3.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$

3.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$

3.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$

3.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$

3.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$

3.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$

3.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$

3.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$

3.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$

3.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$

3.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$

3.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$

3.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$

3.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$

3.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$

3.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$

3.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$

3.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$

3.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$

3.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$

3.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$

3.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$

3.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$

3.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$

3.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2-7}{3x^4+3x+5}$

3.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-5x^2-3x^5}{x^5+6x+8}$

3.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^3}$

3.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2+2}$

3.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$

4.

4.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$

4.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$

4.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$

4.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$

4.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}$

4.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$

4.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$

4.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$

4.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^2+5x+9}{1+4x-x^3}$

4.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$

4.11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x+7}{3x^4-2x^2+x}$

4.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$

4.13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2+1}$

4.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}$

4.15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}$

4.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x+2}{4x^3+2x-1}$

4.17. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}$

4.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$

4.19. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^3+5x^2-3}{2x^2-x+7}$

4.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-7}{x^4-2x^3+1}$

4.21. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^5-4x^3+3}{2x^3+x-7}$

4.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+1}{x^3+4x^2-3}$

4.23. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-2x^3+3}{2x^2+3x-7}$

4.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+x^2-7}{2x^2-5x+3}$

4.25. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-8}{8x^3-4x+5}$

4.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-4}{3x^2-4x+1}$

4.27. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^3-2x+4}{2x^2+x-5}$

4.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x^2-3x}{3x^2+x-10}$

4.29. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+10x-11}{3x^4-2x+5}$

4.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+3x-4}{2x^2-5x+1}$

5.

5.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$

5.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^4+2x-4}$

5.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}$

5.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$

5.5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$

5.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$

5.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^4+3x^2-9}$

5.8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$

5.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+7x+1}$

5.10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-7x+5}{4x^5-3x^3+2}$

5.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5+6x^4-x^3}{2x^2+6x+1}$

5.12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4-3x-2x^2}{3x^4+5x}$

5.13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$

5.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+7x^3-3}{3x^2-5x+1}$

5.15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+7}{2-3x+4x^2}$

5.16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{7x+5}$

5.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-7}{3x^4+2x^3+1}$

5.18. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-3x^2}{1+2x+3x^2}$

5.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+3}{x^3-4x^2-x}$

5.20. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+5x}{2x^2-3x-7}$

5.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^4-2x^2+x}$

5.22. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5-x^3}{4x^2+3x-6}$

5.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x^3-5x^2+4x}$

5.24. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-x-3x^2}{x^3-16}$

5.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-10x+7}{2x^3-3x}$

5.26. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{x^5+4x^3}$

5.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-13}{x^7-3x^5-4x}$

5.28. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3+2x^2+5}$

5.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-81}{3x^2+4x+2}$

5.30. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x+4}{3x^3-5x+1}$

6.

6.1. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$ *ответ*: 7

6.2. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$ *ответ*: $-\dfrac{\sqrt{8}}{48}$

6.3. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$ *ответ*: $-\dfrac{\sqrt{7}}{91}$

6.4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$ *ответ*: $\dfrac{1}{10}$

6.5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$ *ответ*: $\dfrac{\sqrt{5}}{20}$

6.6. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$ *ответ*: $-\sqrt{3}$

6.7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$ *ответ*: $2\sqrt{2}$

6.8. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$ *ответ*: -7

6.9. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$ *ответ*: $\dfrac{\sqrt{11}}{286}$

6.10. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$ *ответ*: $-\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

6.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$ *ответ*: 2

6.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$ *ответ*: $-\dfrac{1}{7}$

6.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ *ответ*: 3

6.14. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ *ответ*: $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

6.15. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$ *ответ*: $-\dfrac{3}{2}$

6.16. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$ *ответ*: $\dfrac{3}{2}$

6.17. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$ *ответ*: $\dfrac{3}{2}$

6.18. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$ *ответ*: $\dfrac{1}{9}$

6.19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$ *ответ*: $\dfrac{5}{64}$

6.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$ *ответ*: $-\dfrac{1}{12}$

6.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$ *ответ*: 2

6.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$ *ответ*: $-3\sqrt{5}$

6.23. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$ *ответ*: $-\dfrac{6}{5}$

6.24. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$ *ответ*: $-\dfrac{25}{24}$

6.25. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$ *ответ*: -5

6.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$ *ответ*: $\dfrac{3}{2}$

6.27. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$ *ответ*: $\dfrac{1}{384}$

6.28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2}{\sqrt{8+x}-3}$ *ответ*: $\dfrac{10}{\sqrt{10}-3}$

6.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$ *ответ*: $\dfrac{1}{16}$

6.30. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$ *ответ*: $\dfrac{1}{18}$

Контрольные вопросы

1. Дайте определения предела функции в точке.
2. Какие типы неопределенностей вам известны?
3. Как избавиться о неопределенности $\dfrac{0}{0}$?
4. Чему равно значение предела функции при неопределенности $\dfrac{c}{0}$?
5. Чему равно значение предела функции при неопределенности $\dfrac{0}{c}$?

Практическая работа № 11
Вычисление пределов с помощью замечательных пределов. Раскрытие неопределенностей

Цель: Проверить знания и умения по вычислению пределов, сводящихся к замечательным.

Задания

Найти пределы.
k – порядковый номер в журнале

1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{(k+2)x}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k\,x^2}{\sin^2 5x}$, 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,(kx+3x)\,x^2}{5x}$,

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x$, 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx-\sin 5x}{kx}$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos kx}{x}$

Задание 7.

7.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$ Ответ: e^{12} 7.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$ Ответ: e^{-12}

7.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$ Ответ: e^{2} 7.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$ Ответ: e^{3}

7.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$ Ответ: e^{10} 7.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$ Ответ: e^{-15}

7.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$ Ответ: e^{2} 7.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$ Ответ: e^{4}

7.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$ Ответ: $e^{9/2}$

7.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$ Ответ: e^{-14}

7.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$ Ответ: e^{-15}

7.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$ Ответ: e

7.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$ Ответ: e^{-6}

7.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$ Ответ: e^{15}

7.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$ Ответ: e^{-32}

7.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$ Ответ: e^{-4}

7.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{x}$ Ответ: e

7.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$ Ответ: e^{3}

7.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$ Ответ: e^{-1}

7.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$ Ответ: $e^{-8/3}$

7.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$ Ответ: $e^{5/2}$

7.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+1}$ Ответ: $e^{-1/3}$

7.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$ Ответ: e

7.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$ Ответ: $e^{-2/3}$

7.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$ Ответ: e^{-2}

7.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$ Ответ: $e^{-3/2}$

Задание 8.

8.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$ Ответ: 0

8.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$ Ответ: ∞

8.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$ Ответ: 0

8.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$ Ответ: 0

8.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$ Ответ: ∞

8.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$ Ответ: 0

8.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{4x}$ Ответ: ∞

8.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{5x}$ Ответ: 0

8.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$ Ответ: 0

8.10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$ Ответ: 0

8.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$ Ответ: ∞

8.12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$ Ответ: 0

8.13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$ Ответ: 0

8.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$ Ответ: 0

8.15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$ Ответ: 0

8.16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}$ Ответ: ∞

8.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$ Ответ: 0

8.18. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$ Ответ: ∞

8.19. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$ Ответ: 0

8.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$ Ответ: ∞

8.21. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$ Ответ: ∞

8.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$ Ответ: 0

8.23. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x-7}{x+6}\right)^{2x}$ Ответ: ∞

8.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-4x}{2-x}\right)^{6x}$ Ответ: ∞

8.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{3-x}\right)^{-x}$ Ответ: 0

8.26. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x}$ Ответ: ∞

8.27. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)^{3x}$ Ответ: ∞

8.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-10x}\right)^{5x}$ Ответ: 0

8.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{9x-4}\right)^{2x}$ Ответ: 0

8.30. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5}{4x-2}\right)^{3x}$ Ответ: 0

Контрольные вопросы

1.Сформулируйте первый и второй замечательный пределы.
2. Чему равна неопределенность вида c^{∞} ?
3. Чему равна неопределенность вида $0\cdot c$?

Практическая работа № 12
Классификация точек разрыва. Вычисление односторонних пределов

Цель: Проверить навыки и умения учащихся по вычислению пределов, раскрытию неопределенностей, классификации точек разрыва.

Задания

1.Доказать, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при x> 0 являются бесконечно малыми одного порядка малости.

1.1. $f(x)=tg2x,\ \varphi(x)=arcSinx$

1.2. $f(x)=1-Cosx,\ \varphi(x)=3x^2$

1.3. $f(x)=arctg^2 3x,\ \varphi(x)=4x^2$

1.4 $f(x)=\sin 3x-\sin x,\ \varphi(x)=5x$

1.5. $f(x)=\cos 3x-\cos x,\ \varphi(x)=7x^2$

1.6. $f(x)=x^2-\cos 2x,\ \varphi(x)=6x^2$

1.7. $f(x)=\sqrt{1+x}-1,\ \varphi(x)=2x$

1.8. $f(x)=\sin x+\sin 5x,\ \varphi(x)=2x$

1.9. $f(x)=\frac{3x}{1-x},\ \varphi(x)=\frac{x}{4+x}$

1.10. $f(x)=\frac{3x^2}{2+x},\ \varphi(x)=7x^2$

1.11. $f(x)=2x^3,\ \varphi(x)=\frac{5x^3}{4-x}$

1.12. $f(x)=\frac{x^2}{5+x},\ \varphi(x)=\frac{4x^2}{x-1}$

1.13. $f(x)=\sin 8x,\ \varphi(x)=arcSin5x$

1.14. $f(x)=\sin 3x+\sin x,\ \ \varphi(x)=10x$

1.15. $f(x)=\cos 7x-\cos x,\ \ \varphi(x)=2x^2$

1.16. $f(x)=1-\cos x,\ \ \varphi(x)=8x^2$

1.17. $f(x)=3\sin^2 4x,\ \ \varphi(x)=x^2-x^4$

1.18. $f(x)=tg(x^2+2x),\ \ \varphi(x)=x^2+2x$

1.19. $f(x)=arcSin(x^2-x),\ \ \varphi(x)=x^3-x$

1.20. $f(x)=Sin7x+Sinx,\ \ \varphi(x)=4x$

1.21. $f(x)=\sqrt{4+x},\ \ \varphi(x)=3x$

1.22. $f(x)=\sin(x^2-2x),\ \ \varphi(x)=x^4-8x$

1.23. $f(x)=\dfrac{2x}{3-x},\ \ \varphi(x)=2x-x^2$

1.24. $f(x)=\dfrac{x^2}{7+x},\ \ \varphi(x)=3x^3-x^2$

1.25. $f(x)=\sin(x^2+5x),\ \ \varphi(x)=x^3-25x$

1.26. $f(x)=Cosx-Cos^3x,\ \ \varphi(x)=6x^2$

1.27. $f(x)=arcSin2x,\ \ \varphi(x)=8x$

1.28. $f(x)=1-Cos4x,\ \ \varphi(x)=x\cdot Sin2x$

1.29. $f(x)=\sqrt{9-x},\ \ \varphi(x)=2x$

1.30. $f(x)=Cos3x-Cos5x,\ \ \varphi(x)=x^2$

2.

Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

2.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{x^3-5x^2}$ *ответ*: $-\dfrac{3}{5}$

2.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{tg3x}$ *ответ*: $\dfrac{5}{3}$

2.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{tg2x}$ *ответ*: $\dfrac{7}{2}$

2.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x^3+27x}$ *ответ*: $\dfrac{1}{9}$

2.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg6x}{2x^2-3x}$

2.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{2x}$ *ответ*: $\dfrac{3}{2}$

2.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{arctg2x}$ *ответ*: $\dfrac{5}{2}$

2.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$ *ответ*: $\dfrac{3}{2}$

2.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{tg3x}$ *ответ*: $\dfrac{2}{3}$

2.10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$ *ответ*: 1

2.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{2x^2}$ *ответ*: -2

2.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{4x^2}$ *ответ*: $\dfrac{9}{2}$

2.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{\ln(1+2x)}$ *ответ*: $\dfrac{3}{2}$

2.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{tg5x}$ *ответ*: $\dfrac{4}{5}$

2.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 2x}$ *ответ*: $\dfrac{5}{2}$

2.16. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg(x+2)}{x^2-4}$ *ответ*: $-\dfrac{1}{4}$

2.17. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{x^3+8}$ *ответ*: $\dfrac{1}{12}$

2.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{tg4x}$ *ответ*: $\dfrac{1}{2}$

2.19. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{tg(x-4)}$ *ответ*: 48

2.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$ *ответ*: 2

2.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x^3)}{2x^3}$ *ответ*: 2

2.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg5x}{tg2x}$ *ответ*: $\dfrac{5}{2}$

2.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$ *ответ*: $\dfrac{3}{2}$

2.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{tg4x}$ *ответ*: 2

2.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{tg2x}$ *ответ*: $\dfrac{5}{2}$

2.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}$ *ответ*: $\dfrac{4}{2}$

2.27. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^3-27}$ *ответ*: $\dfrac{1}{27}$

2.28. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{tg(x+5)}{x^2-25}$

2.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{2x^2}$ *ответ*: 1

2.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$ *ответ*: $\dfrac{5}{3}$

3.

Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики.

3.1. $f(x)=\begin{cases}x+4, x<-1,\\ x^2+2, -1\le x\le 1,\\ 2x, x\ge 1.\end{cases}$

3.2. $f(x)=\begin{cases}x+1, x\le 0\\ (x+1)^2, 0\le x\le 2\\ -x+4, x>2\end{cases}$

3.3. $f(x)=\begin{cases}x+2, x\le -1\\ x^{2+1}, -1<x\le 1\\ -x+3, x>1\end{cases}$

3.4. $f(x)=\begin{cases}-x, x\le 0\\ -(x-1)^2, 0<x<2\\ x-3, x\ge 2\end{cases}$

3.5. $f(x)=\begin{cases}-2(x+1), x\le -1\\ (x+1)^3, -1<x<0\\ x, x\ge 0\end{cases}$

3.6. $f(x)=\begin{cases}-x, x\le 0\\ x^2, 0<x\le 2\\ x+1, x>2\end{cases}$

3.7. $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\le 1\\ 2x, 1<x\le 3\\ x+2, x>3\end{cases}$

3.8. $f(x)=\begin{cases}x-3, x<0\\ x+1, 0\le x\le 4\\ 3+x, x>4\end{cases}$

3.9. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, x\le 0\\ 0, 0<x\le 2\\ x-2, x>2\end{cases}$

3.10. $f(x)=\begin{cases}2x^3, x\le 0\\ x, 0<x\le 1\\ 2+x, x>1\end{cases}$

3.11. $f(x)=\begin{cases}\sin x, x<0\\ x, 0\le x\le 2\\ 0, x>2\end{cases}$

3.12. $f(x)=\begin{cases}\cos x, x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 0, \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\\ 2, x\ge \pi\end{cases}$

3.13. $f(x)=\begin{cases} x-1, x\le 0 \\ x^2, 0<x<2 \\ 2x, x\ge 2 \end{cases}$

3.14. $f(x)=\begin{cases} x+1, x<0 \\ x^2-1, 0\le x<1 \\ -x, x\ge 1 \end{cases}$

3.15. $f(x)=\begin{cases} -x, x<0 \\ x^2+1, 0\le x<2 \\ x+1, x\ge 2 \end{cases}$

3.16. $f(x)=\begin{cases} x+3, x\le 0 \\ 1, 0<x\le 2 \\ x^2-2, x>2 \end{cases}$

3.17. $f(x)=\begin{cases} x-1, x<0 \\ \sin x, 0\le x<\pi \\ 3, x\ge \pi \end{cases}$

3.18. $f(x)=\begin{cases} -x+1, x<-1 \\ x^2+1, -1\le x\le 2 \\ 2x, x>2 \end{cases}$

3.19. $f(x)=\begin{cases} 1, x\le 0 \\ 2, 0<x\le 2 \\ x+3, x>2 \end{cases}$

3.20. $f(x)=\begin{cases} -x+2, x\le -2 \\ x^3, -2<x\le 1 \\ 2, x>1 \end{cases}$

3.21. $f(x)=\begin{cases} 3x+4, x\le -1 \\ x^2-2, -1<x<2 \\ x, x\ge 2 \end{cases}$

3.22. $f(x)=\begin{cases} x, x\le 1 \\ (x-2)^2, 1<x<3 \\ -x+6, x\ge 3 \end{cases}$

3.23. $f(x)=\begin{cases} x-1, x<1 \\ x^2+2, 1\le x\le 2 \\ -2x, x>2 \end{cases}$

3.24. $f(x)=\begin{cases} x^3, x<-1 \\ x-1, -1\le x\le 3 \\ -x+5, x>3 \end{cases}$

3.25. $f(x)=\begin{cases} x, x<-2 \\ -x+1, -2\le x\le 1 \\ x^2-1, x>1 \end{cases}$

3.26. $f(x)=\begin{cases} x+3, x\le 0 \\ -x^2+4, 0<x<2 \\ x-2, x\ge 2 \end{cases}$

3.27. $f(x)=\begin{cases} 0, x\le -1 \\ x^2-1, -1<x\le 2 \\ 2x, x>2 \end{cases}$

3.28. $f(x)=\begin{cases} -1, x<0 \\ \cos x, 0\le x\le \pi \\ 1-x, x>\pi \end{cases}$

3.29. $f(x)=\begin{cases} 2, x<-1 \\ 1-x, -1\le x\le 1 \\ \ln x, x>1 \end{cases}$

3.30. $f(x)=\begin{cases} -x, x\le 0 \\ x^3, 0<x\le 2 \\ x+4, x>2 \end{cases}$

4.

Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках

4.1. $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}+1, \quad x_1=3,\ x_2=4$

4.2. $f(x)=5^{\frac{1}{x-3}}-1, \quad x_1=3,\ x_2=4$

4.3. $f(x)=\dfrac{x+7}{x-2}, \quad x_1=2,\ x_2=3$

4.4. f($f(x)=\dfrac{x-5}{x+3}, \quad x_1=-2,\ x_2=-3$

4.5. $f(x)=4^{\frac{1}{3-x}}+2, \quad x_1=3,\ x_2=2$

4.6. $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}}, \quad x_1=0,\ x_2=2$

4.7. $f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}+1, \quad x_1=5,\ x_2=4$

4.8. $f(x)=5^{\frac{1}{x-4}}-1, \quad x_1=3,\ x_2=4$

4.9. $f(x)=6^{\frac{1}{x-3}}+3, \quad x_1=3,\ x_2=4$

4.10. $f(x)=7^{\frac{1}{5-x}}+1, \quad x_1=5,\ x_2=4$

4.11. $f(x)=\dfrac{x-3}{x+4}, \quad x_1=-5,\ x_2=-4$

4.12. $f(x)=\dfrac{x+5}{x-2}, \quad x_1=3,\ x_2=2$

4.13. $f(x)=5^{\frac{2}{x-3}}, \quad x_1=3,\ x_2=4$

4.14. $f(x)=4^{\frac{2}{x-1}}-3, \quad x_1=1,\ x_2=2$

4.15. $f(x)=2^{\frac{5}{1-x}}-1, \quad x_1=0,\ x_2=1$

4.16. $f(x)=8^{\frac{4}{x-2}}-1, \quad x_1=2,\ x_2=3$

4.17. $f(x)=5^{\frac{4}{3-x}}+1, \quad x_1=2,\ x_2=3$

4.18. $f(x)=\dfrac{3x}{x-4}, \quad x_1=5,\ x_2=4$

4.19. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}, \quad x_1=1,\ x_2=2$

4.20. $f(x)=2^{\frac{3}{x+2}}+1, \quad x_1=-2,\ x_2=-1$

4.21. $f(x)=4^{\frac{3}{x-2}}+2, \quad x_1=2,\ x_2=3$

4.22. $f(x)=3^{\frac{2}{x+1}}-2, \quad x_1=-1,\ x_2=0$

4.23. $f(x)=5^{\frac{3}{x+4}}+1, \quad x_1=-5,\ x_2=-4$

4.24. $f(x)=\dfrac{x-4}{x+2}, \quad x_1=-2,\ x_2=-1$

4.25. $f(x)=\dfrac{x-4}{x+3}, \quad x_1=-3,\ x_2=-2$

4.26. $f(x)=\dfrac{x+5}{x-3}, \quad x_1=3,\ x_2=4$

4.27. $f(x)=3^{\frac{4}{1-x}}+1, \quad x_1=1,\ x_2=2$

4.28. $f(x)=\dfrac{4x}{x+5}, \quad x_1=-5,\ x_2=-4$

4.29. $f(x)=6^{\frac{2}{4-x}}, \quad x_1=3,\ x_2=4$

4.30. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}, \quad x_1=2,\ x_2=3$

Контрольные вопросы

1.Какие величины называют бесконечно малыми одного порядка малости?
2. Какие величины называют эквивалентными бесконечно малыми ?
3. Какая функция называется непрерывной в точке?
4.Сколько известно вам точек разрыва функции, какие?

Практическая работа № 13
Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной

Устный опрос

Сформулировать правила дифференцирования и записать производные основных элементарных функций:

1°. $c'=$ 8°. $(tgx)'=$

2°. $(x^{\alpha})'=$ 9°. $(ctgx)'=$

В частности, $x' =$

$(x^2)' =$

$(x^3)' =$

$(\sqrt{x})' =$

$\left(\frac{1}{x}\right)' =$

3°. $(kx+b)' =$

4°. $(a^x)' =$

В частности, $(e^x)' =$

5°. $(\log_a x)' =$

В частности, $(\ln x)' =$

$(\lg x)' =$

6°. $(\sin x)' =$

7°. $(\cos x)' =$

10°. $(\arcsin x)' =$

11°. $(\arccos x)' =$

12°. $(arctgx)' =$

13°. $(arcctgx)' =$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

14°. $(u+v)' =$

15°. $(u-v)' =$

16°. $(uv)' =$

17°. $(cu)' =$

18°. $\left(\frac{u}{v}\right)' =$

В частности, $\left(\frac{1}{v}\right)' =$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

19°. $f(\varphi(x))' =$

Самостоятельная работа № 1

Вариант 1

1. Найти производную функции $y = \sin^6(4x^3 - 2)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 3x^4 + \cos 5x$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{3}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$, $x_0 = 1$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$. Найти скорость и ускорение в момент времени *t*=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 2

1. Найти производную функции $y = \cos^4(6x^2 + 9)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 2x^5 - \sin 3x$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$, $x_0 = 2$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^3 - 4t^2$. Найти скорость и ускорение в момент времени *t*=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 3

1. Найти производную функции $y = tg^5(3x^4 - 13)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 4x^3 - e^{5x}$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$, $x_0 = 1$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = \frac{1}{4}t^4 + t^2$. Найти скорость и ускорение в момент времени *t*=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 4

1. Найти производную функции $y = ctg^4(5x^3 + 6)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 5x^4 - \cos 4x$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$, $x_0 = 2$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^4 - 2t$. Найти скорость и ускорение в момент времени *t*=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 5

1. Найти производную функции $y = \arcsin^3 7x^2$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 4x^4 + \sin 2x$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = tgx$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = 2t^3 - 8$. Найти скорость и ускорение в момент времени *t*=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 6

1. Найти производную функции $y = arctg^6 5x^4$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 6x^5 + e^{4x}$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 1 + \cos x$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^4 + 2t$. Найти скорость и ускорение в момент времени *t*=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Самостоятельная работа № 2

Исследовать функцию и построить ее график.

Вариант 1

$f(x) = x^2 - 2x + 8$.

Вариант 2

$$f(x) = -\frac{2x^2}{3} + x + \frac{2}{3}.$$

Вариант 3

$f(x) = -x^2 + 5x + 4$.

Вариант 4

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} + \frac{1}{4}.$$

Вариант 5

$f(x) = -x^3 + 3x - 2$.

Вариант 6

$f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$.

Вариант 7

$f(x) = x^3 + 3x + 2$.

Вариант 8

$f(x) = 3x^2 - x^3$.

Практическая работа № 13
Вычисление производных

Цель: Проверить навыки и умения студентов по вычислению производных простейших функций.

Задания

1. Продифференцировать данные функции.

1.1. $y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$

1.2. $y = \frac{3}{x} + 5\sqrt{x^2} - 4x^3 + \frac{2}{x^4}$

1.3. $y = 3x^4 + 3\sqrt{x^5} - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}$

1.4. $y = 7\sqrt{x} - \frac{2}{x^5} - 3x^2 + \frac{4}{x}$

1.5. $y = 7x + \frac{5}{x^2} - \sqrt[7]{x^4} + \frac{6}{x}$

1.6. $y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x}$

1.7. $y = 3x^2 - \frac{3}{x^3} - \sqrt{x^3} + \frac{10}{x^5}$

1.8. $y = \sqrt[3]{x^7} + \frac{3}{x} - 4x^6 + \frac{4}{x^5}$

1.9. $y = 8x^2 + \sqrt[3]{x^4} - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^3}$

1.10. $y = 4x^6 + \frac{5}{x} - \sqrt[3]{x^7} - \frac{7}{x^4}$

1.11. $y = 2\sqrt{x^3} - \frac{7}{x} + 3x^2 - \frac{2}{x^5}$

1.12. $y = 4x^3 - \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^2} + \frac{6}{x^2}$

1.13. $y = 5x^2 - \frac{8}{x^2} + 4\sqrt{x} + \frac{1}{x}$

1.14. $y = \frac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{x} + 5x^4$

1.15. $y = \frac{4}{x^5} - \frac{9}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 7x^3$

1.16. $y = \frac{8}{x^3} + \frac{3}{x} - 4\sqrt{x^3} + 2x^7$

1.17. $y = 4x^2 + \frac{4}{x} - \sqrt[3]{x^7} - 2x^6$

1.18. $y = 10x^2 + 3\sqrt{x^5} - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^4}$

1.19. $y = \sqrt{x^5} - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} - 3x^3$

1.20. $y = 9x^3 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^7}$

1.21. $y = 3\sqrt{x} + \frac{4}{x^5} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{7}{x}$

1.22. $y = \sqrt{x^3} + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^5} - 5x^3$

1.23. $y = 7x^2 + \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^4} + \frac{8}{x^3}$

1.24. $y = 8x^3 - \frac{4}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[7]{x^2}$

1.25. $y = x - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x} - \sqrt[5]{x^4}$

1.26. $y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^5} + 3x$

1.27. $y = 4x^3 + \frac{3}{x} - \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^4}$

1.28. $y = 4x^5 - \frac{5}{x} - \sqrt{x^3} + \frac{2}{x^3}$

1.29. $y = \frac{7}{x} + \frac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x^3} - 2x^6$

1.30. $y = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + 3x^2 - \sqrt{x^7}$

2. Найти производные функций.

а – порядковый номер в журнале

а) $y = 2a \cdot x^5 - \frac{a}{x^2}$ *в)* $y = \frac{ax^2 - 2a}{x^2 + 2a}$

б) $y = (a \cdot \sqrt{x} + 1) \cdot x^3$ *г)* $y = (ax^5 - 3) \cdot (x^4 + 2a)$

3. Решить уравнение $y'(x) = 0$, если:

$$y = \frac{x^2 - 3a}{x + 2a}$$

4.Решить неравенство:

$y'(x) > 0$, если $y = ax^2 + 3a \cdot x - 5a$.

Контрольные вопросы

1.Дайте определение производной функции.
2. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции?
3. Как вычислить частное значение производной?
4. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?Производная произведения и частного.

Практическая работа № 14
Нахождение производных сложных функций

Цель: Проверить навыки и умения студентов по вычислению производных сложной функции

Задания

Найти производные функции.
а – порядковый номер в журнале

1. $y = a\,x^{a} - \dfrac{a}{x^{a}} + \sqrt[a]{x^{a+6}} - ax + a$

2. $y = \sqrt[2a]{(ax^{2} - 3ax + 5)^{3}} - \dfrac{a}{(x+a)^{a-4}}$

3. $y = tg^{a}(x+a)\cdot \arccos ax^{2}$

4. $y = \arcsin^{a} ax \cdot \log_{a}(x-a)$

5. $y = a^{-x^{4}} \cdot ctg\, ax^{3}$

6. $y = ctg^{2} ax \cdot arctg\sqrt{x^{a}}$

7. $y = \dfrac{\sqrt{ax^{2} - 3ax + 5a}}{e^{-x^{6}}}$

8. $y = \dfrac{\lg(ax^{2} - 2ax + 3a)}{arcctg^{2} ax}$

Контрольные вопросы

1. Правила дифференцирования.
2. Производные элементарных функций.
3. Правило нахождения производной сложной функции.

Практическая работа № 15
Нахождение производных неявной функции, заданной параметрически. Логарифмическое дифференцирование

Цель: Проверить навыки нахождения производной функций заданных неявно, дифференцирование функций заданных параметрически. Логарифмическое дифференцирование.

Задания

1. Продифференцировать функцию, заданную неявно

1.1. $y^{2} + x^{2} = \sin y$

1.2. $y^{2} - x = \cos y$

1.3. $y = x + arctgy$

1.4. $arctgy = 4x + 5y$

1.11. $\ln y - \dfrac{y}{x} = 7$

1.12. $\sin y = 7x + 3y$

1.13. $tgy = 4y - 5x$

1.14. $y = 7x - ctgy$

1.5 $3x+\sin y=5y$ 1.15. $xy-6=\cos y$ 1.6. $yx=ctgy$

1.16. $3y=7+xy^3$

1.7. $tgy=3x+5y$ 1.17. $y^2=x+\ln\dfrac{y}{x}$

1.8. $y=e^y+4x$ 1.18. $x^2y^2-y^3=4x-5$

1.9. $e^y=4x-7y$ 1.19. $x^2y^2+x=5y$

1.10. $4\sin^2(x+y)=x$ 1.20. $x^2y^2+x^4+y=4$ 1.21. $\sin y=xy^2+5$

1.22. $x^3+y^3=5x$

1.23. $y^2=\dfrac{(x-y)}{x+y}$

1.24. $\sin^2(3x+y^2)=5$

1.25. $ctg^2(x+y)=5x$

1.26. $\dfrac{e^3}{x}=xy+1$

1.27. $\dfrac{\cos y}{x}+x^2+1=0$

1.28. $y\sin x=\cos(x-y)$

1.29. $e^{xy}+\dfrac{y}{x}=\cos 3x$

1.30. $\ln y=arctg\dfrac{x}{y}$

2. Логарифмическое дифференцирование

2.1. $y=3^{x^2}-tg^4 2x$ 2.11. $y=(\ln(x+7))^{ctg2x}$

2.2. $y=\lg^4(x^5-\sin^5 2x)$ 2.12. $y=(\cos(3+x))^{\arcsin 3x}$ 2.3. $y=(\sin 3x)^{\cos 5x}$

2.13. $y=(\sin 4x)^{\frac{arctg1}{x}}$

2.4. $y=(tg3x)^{x^4}$ 2.14. $y=(ctg2x^3)^{\sin\sqrt{x}}$

2.5. $e^{x^2y^2}-x^4+y^4=5$ 2.15. $y=(\sqrt{3x+2})^{arcctg2x}$ 2.6. $y=(1+x^4)^{tg7x}$

2.16. $y=(\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$

2.7. $y=(ctg5x)^{x^3-1}$ 2.17. $y=(\cos(2+x))^{\ln x}$ 2.8. $2^x+2^y=2^{x+y}$

2.18. $y=(\cos 5x)^{arctg\sqrt{x}}$ 2.9. $y=(\sin 3x)^{\arccos x}$ 2.19. $y=(\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$

2.10. $y=(\arccos 5x)^{\ln x}$ 2.20. $y=(\arcsin 5x)^{tg\sqrt{x}}$ 2.21. $y=(arctg2x)^{\sin x}$

2.22. $y=(ctg(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$ 2.23. $y=(tg3x^4)^{\sqrt{x+3}}$ 2.24. $y=(\sqrt{x+5})^{\arccos 3x}$

2.25. $y=(tg7x^5)^{\sqrt{x+2}}$ 2.26. $y=(\arccos(x+2))^{tg3x}$ 2.27. $y=(arctg(x+7))^{\cos 2x}$

2.28. $y=(ctg(3x-2))^{\arcsin 3x}$

2.29. $y=(\cos(2x-5))^{arctg5x}$ 2.30. $y=(\lg(4x-3))^{\arccos 4x}$

3. Дифференцирование функций заданных параметрически

3.1. $\begin{cases} x = (2t+3)\cdot\cos t \\ y = 3t^3 \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+2} \\ y = \left(\dfrac{t}{t+2}\right)^2 \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{4t} \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[5]{t} \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{t^3+1} \\ y = \dfrac{t^2}{t^2+1} \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t} \\ y = t\cdot\ln t \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} x = e^t\cdot\cos t \\ y = e^t\cdot\sin t \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} x = t^4 \\ y = \ln t \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} x = arctgt \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} x = 3(t-\sin t) \\ y = 3(1-\cos t) \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2-1} \\ y = \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-1}} \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} x = 3(\sin t - t\cos t) \\ y = 3(\cos t + t\sin t) \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} x = 4t+2t^2 \\ y = 5t^3-3t^2 \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = e^{-3t} \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t} \\ y = t^2\cdot\ln t \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} x = 5\sin^3 t \\ y = 3\cos^3 t \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{(t-1)^2} \\ y = \sqrt{t}-1 \end{cases}$

3.26. $\begin{cases} x = e^{-3t} \\ y = e^{8t} \end{cases}$

3.27. $\begin{cases} x = \ln^2 t \\ y = t\ +\ln t \end{cases}$

3.28. $\begin{cases} x = te^t \\ y = \dfrac{t}{e^t} \end{cases}$

3.29. $\begin{cases} x = 6t^2 - 4 \\ y = 5t^5 \end{cases}$ 3.30. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln t \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется, заданной неявно?
2. Алгоритм дифференцирования функции, заданной неявно.
3. Как находится производная функции заданной параметрически?
4. В чем смысл логарифмического дифференцирования?

Практическая работа № 16
Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лопиталя

Цель: Проверить навыки нахождения производных высших порядков, правило Лопиталя.

Задания

1. Для данной функции y и аргумента x_0 вычислить $y'''(x_0)$.

1.1. $y = \sin^2 x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$;

1.2. $y = arctgx,\ x_0 = 1$;

1.3. $y = \ln\left(2 + x^2\right),\ x_0 = 0$;

1.4. $y = e^x \cdot \cos x,\ x_0 = 0$;

1.5. $y = e^x \cdot \sin 2x,\ x_0 = 0$;

1.6. $y = e^{-x} \cdot \cos x,\ x_0 = 0$;

1.7. $y = e^x \cdot \sin 2x,\ x_0 = \pi$;

1.8. $y = (2x+1)^5,\ x_0 = 1$;

1.9. $y = \ln(1+x),\ x_0 = 2$;

1.10. $y = \frac{1}{2} - x^2 e^x,\ x_0 = 0$;

1.11. $y = \arcsin x,\ x_0 = 0$;

1.12. $y = (5x-4)^5,\ x_0 = 2$;

1.13. $y = x \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$;

1.14. $y = x^2 \ln x,\ x_0 = \frac{1}{3}$;

1.15. $y = x \sin 2x,\ x_0 = -\frac{\pi}{4}$;

1.16. $y = x \cos 2x,\ x_0 = \frac{\pi}{12}$

1.17. $y = x^4 \ln x,\ x_0 = 1$

1.18. $y = x + arctgx,\ x_0 = 1$

1.19. $y = \cos^2 x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$

1.20. $y = \ln\left(x^2 - 4\right),\ x_0 = 3$

1.21. $y = x^2 \cdot \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$

1.22. $y = x \cdot \arccos x,\ x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1.23. $y = (x+1) \cdot \ln(x+1),\ x_0 = -\frac{1}{2}$

1.24. $y = \ln^3 x,\ x_0 = 1$

1.25. $y = 2^{x^2},\ x_0 = 1$

1.26. $y = (4x-3)^5,\ x_0 = 1$

1.27. $y = x \cdot arcctg,\ x_0 = 2$

1.28. $y = (7x-4)^6,\ x_0 = 1$

1.29. $y = x \sin 2x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$

1.30. $y = \sin(x^3 + \pi),\ x_0 = \sqrt[3]{\pi}$

2. Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя

2.1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$;

2.2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^{\ln x} - x}{x-1}$;

2.3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx - x}{x - \sin x}$;

2.4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1 - 4\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right)}{1-x^2}$;

2.5. $\lim\limits_{x\to a} \arcsin \frac{x-a}{a} \cdot ctg(x-a)$;

2.6. $\lim\limits_{x\to\infty} (\pi - 2arctgx)\ln x$;

2.7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right)x$;

2.8. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right)$;

2.9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x_2}{x^2 - \sin x^2}$;

2.10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx - x}{2\sin x + x}$;

2.11. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2arctgx^2 - \pi}$;

2.12. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$;

2.13. $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$;

2.14. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^5}$;

2.15. $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$;

2.16. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

2.17. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 5x}$

2.18. $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{x}}{ctg\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

2.19. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-2tgx}{1-\cos 4x}$

2.20. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}$

2.21. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tgx}{tg5x}$

2.22. $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)ctgx$

2.23. $\lim_{x\to 1}(1-x)tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

2.24. $\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\left(\frac{3}{x}\right)$

2.25. $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$

2.26. $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

2.27. $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

2.28. $\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{4x-\sin x}$

2.29. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tg5x}$

3. Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя

3.1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{tg^2 2x}$;

3.2. $\lim_{x\to\infty} x^4 \sin\left(\frac{a}{x}\right)$;

3.3. $\lim_{x\to 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$;

3.4. $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6}\right)$;

3.5. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)} - \frac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right)$;

3.6. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}\right)$;

3.7. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{ctgx} - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$;

3.8. $\lim_{x\to\pi}(\pi - x)tg\left(\frac{x}{2}\right)$;

3.9. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x - arctgx}{x^3}\right)$;

3.10. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2a}}\left(\frac{1-\sin ax}{(2ax-\pi)^2}\right)$;

3.11. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}\right)$;

3.12. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}\right)$;

3.13. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{c^x-1}\right)$;

3.14. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^3}$;

3.15. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{ctgx}$;

3.16. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$

3.17. $\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x^n-a^n}$

3.18. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}$

3.19. $\lim_{x\to 0} x\ln x$

3.20. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}\right)$

3.21. $\lim_{x\to 0}\left(1-e^{2x}\right)\cdot ctgx$

3.22. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}\right)$

3.23. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1-x^3}{\sin^2 2x}\right)$

3.24. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}\right)$

3.25. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$

3.26. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x^5}\right)$

3.27. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}$

3.28. $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{x}}{ctg\left(\frac{5x}{2}\right)}$

3.29. $\lim_{x\to 0}(1-\cos 2x)\cdot ctg4x$

3.30. $\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\sin\frac{b}{x}\right)$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение дифференцируемости функции в точке x_0.
2. Дайте определение второй производной функции *y = f (x)*.
3. Дайте определение n - й производной функции *y = f (x)*.
4. Сформулируйте правило Лопиталя.

Практическое занятие № 17
Нахождение асимптот и интервалов монотонности

Цель: Проверить навыки исследования функции на промежутки монотонности, и нахождение асимптот.

Задания

1. Найдите промежутки монотонности функции

1.1. *а)* $y=1+3x-x^3$; *б)* $y=\frac{1}{x+2}$

1.2. *а)* $y=x^2(x^2-2)+3$; *б)* $y=-\sqrt{x-3}$

1.3. *а)* $y=0{,}25x^4-2x^2+1{,}75$; *б)* $y=1+\frac{2}{x}$

1.16. *а)* $y=2x^3+3x^2-2$; *б)* $y=\frac{2}{x-3}$

1.17. *а)* $y=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+5$; *б)* $y=\frac{3}{x}-1$

1.18. *а)* $y=x^3-3x^2+4$; *б)* $y=3x+\frac{1}{3x}$

1.4. *а*) $y=\frac{1}{2}(x-2)^2(2x+3)$; *б*) $y=5+\frac{1}{x}$

1.5. *а*) $y=2x^3-3x^2-4$; *б*) $y=\frac{x^2}{x^2+3}$

1.6. *а*) $y=x^3+6x^2+9x$; *б*) $y=\frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$

1.7. *а*) $y=x^2(x-3)+1$; *б*) $y=(x-1)e^{3x}$

1.8. *а*) $y=x^3-4x^2+4x$; *б*) $y=xe^{-3x}$

1.9. *а*) $y=x^3+3x^2-9x-27$; *б*) $y=xe^{-x}$

1.10. *а*) $y=2(x+2)(x-1)^2$; *б*) $y=xe^x$

1.11. *а*) $y=2x^3-3x^2-36x+40$; *б*) $y=e^{x^2}$

1.12. *а*) $y=x^3-3x$; *б*) $y=e^{-x^2}$

1.13. *а*) $y=x^4-2x^2$; *б*) $y=\frac{x^2}{x-2}$

1.14. *а*) $y=x^3-6x^2+9$; *б*) $y=\frac{-x^2+3x-1}{x}$

1.15. *а*) $y=x^3-3x^2+4$; *б*) $y=\frac{-2x^2+4+x}{(x-2)^2}$

1.19. *а*) $y=-x^3+4x^2-4x$; *б*) $y=\frac{4}{x}-x$

1.20. *а*) $y=-x^4+8x^2-16$; *б*) $y=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$

1.21. *а*) $y=-x^3+3x+2$; *б*) $y=\frac{2}{x^2-4}$

1.22. *а*) $y=x^3+6x^2+9x$; *б*) $y=\frac{2}{x^2+4}$

1.23. *а*) $y=x^4-2x^2+2$; *б*) $y=-\frac{16}{\sqrt{x^2+5}}$

1.24. *а*) $y=6x^4-4x^6$; *б*) $y=6-4\cdot\sqrt[3]{x^2}$

1.25. *а*) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6$; *б*) $y=x\cdot\ln x$

1.26. *а*) $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5$; *б*) $y=\frac{x}{x-1}$

1.27. *а*) $y=\frac{1}{5}x^5-1\frac{1}{3}x^3$; *б*) $y=\frac{2x}{x^2+1}$

1.28. *а*) $y=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}-6x+1$; *б*) $y=x\sqrt{2-x}$

1.29. *а*) $y=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{16}-6x+\frac{1}{4}$; *б*) $y=\frac{3x}{1+x^2}$

1.30. *а*) $y=\frac{x^4}{2}-8x^2$; *б*) $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$

2. Найти асимптоты и промежутки монотонности

2.1. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

2.2. $y=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

2.3. $y=e^{\frac{1}{5+x}}$

2.4. $y=\dfrac{x}{9-x}$

2.5. $y=\dfrac{4x-x^2-4}{x}$

2.6. $y=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$

2.7. $y=\dfrac{17-x^2}{4x-5}$

2.8. $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$

2.9. $y=\dfrac{x}{x+2}$

2.10. $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$

2.11. $y=\dfrac{2x^2-x+3}{x-1}$

2.12. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

2.13. $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$

2.14. $y=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$

2.15. $y=\dfrac{2x^2-1}{x}$

2.16. $y=\dfrac{x^2}{4-2x}$

2.17. $y=\dfrac{x^2+6}{x^2+1}$

2.18. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

2.19. $y=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$

2.20. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

2.21. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

2.22. $y=\dfrac{x^5}{x^4-1}$

2.23. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$

2.24. $y=\dfrac{x^2-3x-2}{x+1}$

2.25. $y=\dfrac{x^3}{x^4-1}$

2.26. $y=\dfrac{x^3}{2(x-5)^2}$

2.27. $y=x^2-\dfrac{1}{x^2}$

2.28. $y=\dfrac{5x^4+3}{x}$

2.29. $y=\dfrac{4-2x}{1-x^2}$

2.30. $y=\dfrac{5x}{4-x^2}$

Контрольные вопросы

1. Что такое асимптота?
2. Виды асимптот
3. Правила нахождения вертикальных и наклонных асимптот.
4. Правило нахождения промежутков монотонности.

Практическое занятие № 18
Нахождение экстремумов. Построение графиков

Цель: Проверить навыки нахождения точек экстремума и алгоритм построения графиков функций.

Задания

1. Исследовать на экстремум следующие функции

1.1. $а) y = \frac{x^4}{2} - 8x^2$; $б) y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

1.2. $а) y = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} - 6x + \frac{1}{4}$; $б) y = \frac{3x}{1 + x^2}$

1.3. $а) y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 6x + 1$; $б) y = x\sqrt{2 - x}$

1.4. $а) y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5$; $б) y = \frac{x}{x - 1}$

1.5. $а) y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6$; $б) y = x \cdot \ln x$

1.6. $а) y = 6x^4 - 4x^6$; $б) y = 5 - 4 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

1.7. $а) y = x^4 - 2x^2 + 2$; $б) y = \sqrt[3]{x^2 - 4x}$

1.8. $а) y = x^3 + 6x^2 + 9x$; $б) y = \frac{2}{x^2 + 4}$

1.16. $а) y = x^3 - 6x^2 + 9$; $б) y = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x}$

1.17. $а) y = x^4 - 2x^2$; $б) y = \frac{x^2}{x - 2}$

1.18. $а) y = x^3 - 3x$; $б) y = e^{-x^2}$

1.19. $а) y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$; $б) y = e^{x^2}$

1.20. $а) y = 2(x + 2)(x - 1)^2$; $б) y = xe^x$

1.21. $а) y = -x^3 + 3x + 2$; $б) y = \frac{2}{x^2 - 4}$

1.22. $а) y = x^3 - 4x^2 + 4x$; $б) y = xe^{-3x}$

1.23. $а) y = x^2(x - 3) + 1$; $б) y = (x - 1)e^{3x}$

1.9. *а)* $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$
б) $y = xe^{-x}$

1.10. *а)* $y = -x^4 + 8x^2 - 16$
б) $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

1.11. *а)* $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$
б) $y = \frac{4}{x} - x$

1.12. *а)* $y = x^3 - 3x^2 + 4$
б) $y = 3x + \frac{1}{3x}$

1.13. *а)* $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 5$
б) $y = \frac{3}{x} - 1$

1.14. *а)* $y = 2x^3 + 3x^2 - 2$
б) $y = \frac{2}{x-3}$

1.15. *а)* $y = x^4 - 8x^2 + 3$
б) $y = x - \sin 2x$

1.24. *а)* $y = x^3 + 6x^2 + 9x$
б) $y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$

1.25. *а)* $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$
б) $y = \frac{x^2}{x^2+3}$

1.26. *а)* $y = \frac{1}{2}(x-2)^2(2x+3)$
б) $y = 5 + \frac{1}{x}$

1.27. *а)* $y = \frac{1}{5}x^5 - 1\frac{1}{3}x^3$
б) $y = \frac{2x}{x^2+1}$

1.28. *а)* $y = 0{,}25x^4 - 2x^2 + 1{,}75$
б) $y = \cos 3x - 3x$

1.29. *а)* $y = x^2(x^2-2) + 3$
б) $y = -\sqrt{x-3}$

1.30. *а)* $y = 1 + 3x - x^3$
б) $y = \frac{1}{x+2}$

2. Исследовать на экстремум и построить график функции

2.1. $y = x^3 - 3x^2 + 2$

2.2. $y = 2x^3 + x^2 - 8x - 7$

2.3. $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

2.4. $y = x^3(2-x)$

2.5. $y = -9x + x^3$

2.6. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$

2.7. $y = 4x^4 - 2x^2 + 3$

2.8. $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1$

2.9. $y = x^3 - 4x^2$

2.10. $y = 3x^4 - 4x^3$

2.11. $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2$

2.12. $y = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$

2.13. $y = 2x^3 + 3x^2 - 2$

2.16. $y = x^3 + x^2 - x - 1$

2.17. $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + \frac{5}{3}$

2.18. $y = 2x^4 - 9x^2 + 7$

2.19. $y = x^5 - 5x$

2.20. $y = 5x^3 - 3x^5$

2.21. $y = 8 - 2x - x^2$

2.22. $y = x^3 - 3x^2 + 4$

2.23. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$

2.24. $y = 4x^2 - x^4 - 3$

2.25. $y = x^4 - 2x^2 + 3$

2.26. $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2$

2.27. $y = 1 - x^5 - \frac{5}{2}x^2$

2.28. $y = \frac{1}{6}x^3 - 2x$

2.14. $y=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+5$ 2.29. $y=\frac{1}{3}-4x+2{,}5x^2-\frac{1}{3}x^3$

2.15. $y=x^4-8x^2+1-4x^3$ 2.30. $y=-\frac{1}{3}x^3+3{,}5x^2-10x-\frac{1}{3}$

Контрольные вопросы

1. Признаки возрастания и убывания функции.
2. Алгоритм исследования функции на промежутки монотонности.
3. Определения точек максимума и минимума функции.
4. Необходимое и достаточное условие существования экстремума.
5. Алгоритм исследования функции на экстремум.
6. Наибольшее и наименьшее значение функции, алгоритм нахождения.

Практическое занятие № 19
Нахождение точек перегиба, интервалов выпуклости и вогнутости

Цель: проверить умения и знания по нахождению интервалов выпуклости и вогнутости, точек перегиба.

Задания

1. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба кривых

1.1. $y=x^4-\frac{3}{2}x^2-4x$ 1.16 $y=-\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3+4x^2$

1.2. $y=\frac{1}{3}x^3-x$ 1.17. $y=3x^2-x^3$

1.3. $y=x^3-6x^2+9x-3$ 1.18. $y=\frac{5}{12}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{9}{2}x^2$

1.4. $y=2x^3-3x^2-4x+9$ 1.19. $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2$

1.5. $y=-x^3+6x^2-15x+10$ 1.20. $y=\frac{1}{3}x^3-x$

1.6. $y=x^4-12x^3+48x^2-50$ 1.21. $y=x^3+3x^2-5x-6$

1.7. $y=x+36x^2-2x^3-x^4$ 1.22. $y=x^4-12x^3+54x^2-50$

1.8. $y=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{2}x^2$ 1.23. $y=\frac{1}{6}x^4-x^2$

1.9. $y=12x^4-12x^2$ 1.24. $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{1}{3}$

1.10. $y=3x^5-5x^2+1$ 1.25. $y=\frac{2}{3}x^3+4x^2-10$

1.11. $y=x^3-4x^2-2x+1$ 1.26. $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2$

1.12. $y=x^4-4x^3+8x-2$ 1.27. $y=\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{1}{3}$

1.13. $y=x^3-5x^2+3x-1$ 1.28 $y=x^3+3x^2+24x-8$

1.14. $y=x^3-12x^2+3x$ 1.29. $y=x^3-9x^2-24x+12$

1.15. $y=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{6}x^3-x^2$ 1.30. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+6$

2. Исследовать на экстремум и точки перегиба кривую и построить схематический график функции

2.1. $y = 6 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$

2.2. $y = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{1}{12}x^4$

2.3. $y = 12 - 24x + x^3 - 9x^2$

2.4. $y = 3x - 12x^2 + x^3$

2.5. $y = 24x - 8 + 3x^2 + x^3$

2.6. $y = 3x + x^3 - 5x^2 - 1$

2.7. $y = x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}$

2.8. $y = 8x - 2 + x^4 - 4x^3$

2.9. $y = -2x^2 + \frac{1}{3}x^3$

2.10. $y = 1 + x^3 - 4x^2 - 2x$

2.11. $y = 4x^2 - 10 + \frac{2}{3}x^3$

2.12. $y = 1 + 3x^5 - 5x^2$

2.13. $y = 2x^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^3$

2.14. $y = 12x^4 - 12x^2$

2.15. $y = \frac{1}{6}x^4 - x^2$

2.16. $y = 54x^2 - 50 + 5x^4 - 12x^3$

2.17. $y = x - 2x^3 - x^4 + 36x^2$

2.18. $y = 3x^2 - 5x - 6 + x^3$

2.19. $y = 48x^2 - 50 + x^4 - 12x^3$

2.20. $y = 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$

2.21. $y = 6x^2 - x^3 - 15x + 10$

2.22. $y = \frac{1}{3}x^3 - x$

2.23. $y = 9 + 2x^3 - 3x^2 - 4x$

2.24. $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{5}{12}x^4$

2.25. $y = 9x - 3 + x^3 - 6x^2$

2.26. $y = 9x - 3 + x^3 - 6x^2$

2.27. $y = -x^3 + 3x^2$

2.28. $y = -x + \frac{1}{3}x^3$

2.29. $y = x^4 - 4x - \frac{3}{2}x^2$

2.30. $y = \frac{5}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{1}{4}x^4$

3. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба кривой

3.1 $y = \frac{5x^4 + 3}{x}$

3.2 $y = \frac{4 - 2x}{1 - x^2}$

3.3 $y = \frac{5x}{4 - x^2}$

3.4 $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

3.5 $y = \frac{x^3}{x^4 - 1}$

3.6 $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$

3.7 $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

3.16 $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$

3.17 $y = (x - 1)e^{3x+1}$

3.18 $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

3.19 $y = \frac{x^5}{x^4 - 1}$

3.20 $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$

3.21 $y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1}$

3.22 $y = x \ln x$

3.8 $y=\dfrac{x^2+1}{x^2}$

3.9 $y=\dfrac{4x-x^2-4}{x}$

3.10 $y=x/(9-x)$

3.11 $y=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$

3.12 $y=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

3.13 $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$

3.14 $y=x^3e^{=x^2/2}$

3.15 $y=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}(x-5)$

3.23 $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$

3.24 $y=x-\ln(1+x^2)$

3.25 $y=x^2-2\ln x$

3.26 $y=(x^3+4)/x^2$

3.27 $y=\ln(x^2+1)$

3.28 $y=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$

3.29 $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

3.30 $y=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

Контрольные вопросы

1. Что такое точка перегиба?
2. Сформулируйте правило нахождения точки перегиба.
3. Как определяется геометрически и по знаку второй производной выпуклость и вогнутость кривой?
4. Алгоритм нахождения интервалов выпуклости.

Практическое занятие № 20
Полное исследование функций. Построение графиков

Цель. Выявить уровень овладения учащимися комплексом знаний и умений по исследованию функции и построению графика функции.

1. Провести полное исследование указанных функций и построить их графики

1.1 $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

1.2 $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$

1.3 $y=x-\ln(1+x^2)$

1.4 $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$

1.5 $y=x^2-2\ln x$

1.6 $y=x^3e^{=x^2/2}$

1.7 $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$

1.11 $y=\dfrac{x^2+6}{x^2+1}$

1.12 $y=x\ln x$

1.13 $y=(x-1)e^{3x+1}$

1.14 $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

1.15 $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

1.16 $y=\dfrac{x^5}{x^4-1}$

1.17 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$

1.8 $y=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$ 1.18 $y=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}(x-5)$

1.9 $y=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 1.19 $y=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

1.10 $y=\ln(x^2+1)$ 1.20 $y=e^{1/(5+x)}$

1.21 $y=x/(9-x)$ 1.22 $y=\dfrac{4x-x^2-4}{x}$

1.23 $y=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$

1.24 $y=\dfrac{5x^4+3}{x}$

1.25 $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$

1.26 $y=\dfrac{4-2x}{1-x^2}$

1.27 $y=\dfrac{5x}{4-x^2}$

1.28 $y=\dfrac{x^3}{x^4-1}$

1.29 $y=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$

1.30 $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

2. Провести полное исследование указанных функций и построить их графики.

2.1. $y=x^3-3x^2+2$ 2.16. $y=x^3+x^2-x-1$

2.2. $y=2x^3+x^2-8x-7$ 2.17. $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x+\dfrac{5}{3}$

2.3. $y=-x^4+5x^2-4$ 2.18. $y=2x^4-9x^2+7$

2.4. $y=x^3(2-x)$ 2.19. $y=x^5-5x$

2.5. $y=-9x+x^3$ 2.20. $y=5x^3-3x^5$

2.6. $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$ 2.21. $y=8-2x-x^2$

2.7. $y=4x^4-2x^2+3$ 2.22. $y=x^3-3x^2+4$

2.8. $y=x^4-4x^3-8x^2+1$ 2.23. $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2$

2.9. $y=x^3-4x^2$ 2.24. $y=4x^2-x^4-3$

2.10. $y=3x^4-4x^3$ 2.25. $y=x^4-2x^2+3$

2.11. $y=\dfrac{1}{3}x^3+3x^2$ 2.26. $y=\dfrac{1}{2}x^4-3x^2+2$

2.12. $y=-\dfrac{1}{4}x^4+x^2$ 2.27. $y=1-x^5-\dfrac{5}{2}x^2$

2.13. $y=2x^3+3x^2-2$ 2.28. $y=\dfrac{1}{6}x^3-2x$

2.14. $y=\dfrac{2}{3}x^3-x^2-4x+5$ 2.29. $y=\dfrac{1}{3}-4x+2{,}5x^2-\dfrac{1}{3}x^3$

2.15. $y = x^4 - 8x^2 + 1 - 4x^3$ 2.30. $y = -\frac{1}{3}x^3 + 3{,}5x^2 - 10x - \frac{1}{3}$

3.Найти наименьшее и наибольшее значения функции y =f(x) на отрезке [a; b].

3.1. $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$, $[0;3]$ 3.16. $y = e^{4x-x^2}$, $[1;3]$

3.2. $y = \frac{3x}{x^2+1}$, $[0;5]$ 3.17. $y = \frac{x^5 - 8}{x^4}$, $[-3;-1]$

3.3. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$, $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ 3.18. $y = \frac{e^{2x}+1}{e^x}$, $[-1;2]$

3.4 $y = (x+2)\cdot e^{1-x}$, $[-2;2]$ 3.19. $y = x \cdot \ln x$, $\left[\frac{1}{e^2};1\right]$

3.5. $y = \ln(x^2 - 2x + 4)$, $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$ 3.20. $y = x^3 \cdot e^{x+1}$, $[-4;0]$

3.6. $y = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 4}$, $[-1;1]$ 3.21. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$, $[-1;3]$

3.7. $y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^3$, $[1;2]$ 3.22. $y = (x+1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$, $\left[-\frac{4}{5};3\right]$

3.8. $y = \sqrt{x - x^3}$, $[-2;2]$ 3.23. $y = e^{6x-x^2}$, $[-3;3]$

3.9. $y = 4 - e^{-x^2}$, $[0;1]$ 3.24. $y\frac{\ln x}{x}$, $[1;4]$

3.10. $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$, $[1;2]$ 3.25. $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$, $[-3;1]$

3.11. $y = x \cdot e^x$, $[-2;0]$ 3.26. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $[-1;2]$

3.12. $y = (x-2)\cdot e^x$, $[-2;1]$ 3.27. $y = (3-x)\cdot e^{-x}$, $[0;5]$

3.13. $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$, $[0;3]$ 3.28. $y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

3.14. $y = \frac{x}{9 - x^2}$, $[-2;2]$ 3.29. $y = 108x - x^4$, $[-1;4]$

3.15. $y = \frac{1 + \ln x}{x}$, $\left[\frac{1}{e};e\right]$ 3.30. $y = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + 7$, $[16;20]$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте алгоритм нахождения экстремумов функции.
2. Какой схемой рекомендуется пользоваться при построении графика функции?
3. Сформулируйте правило нахождения интервалов выпуклости и вогнутости.
4. Как отыскиваются экстремумы функций с помощью второй производной?
5. В чем различие между нахождением максимума и минимума функции и нахождением ее наибольшего и наименьшего значений?

Тест по теме «Производные функций»

1. Прямолинейное движение точки задано уравнением $S = 3t^2 - 2t + 5$ (м). Найти скорость движения точки в момент времени $t = 3c$.

$a)$ 26 (м /с) $b)$ 16 (м /с) $c)$ 30 (м /с).

2. Найти $y'(1)$, если $y = x^2 - x$

a) $y'(1) = 1$ *b*) $y'(1) = 0$ *c*) $y'(1) = 9$

3. Найти $y'(-1)$, если $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$

a) $y'(-1) = 1$ *b*) $y'(-1) = -3$ *c*) $y'(-1) = 5$

4. Найти $y'(1)$, если $y = \frac{1}{x^4}$

a) $y'(1) = -4$ *b*) $y'(1) = 3$ *c*) $y'(1) = 4$

5. Найти $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, если $y = \sin 2x$

a) $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1$ *b*) $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ *c*) $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

6. Производная произведения функций вычисляется по формуле:

a) $(u \cdot v)' = u' \cdot v'$ b) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$ c) $(u \cdot v)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

7. Найти производную функции $f(x) = x^3 + 5x$

a) $4x^5$-1 b) $3x^2$+5 c) 0

8. Найти угловой коэффициент касательной к оси OX функции

$y = 3x^2 + x$; *в точке* $x_0 = 2$

a) -5 b) 13 c) 2

9. Найдите производную функции $y = 9 - 9x^8 - \frac{6}{5}x^5$.

a) $y' = 9x - x^9 - \frac{1}{5}x^6$; *b*) $y' = 9x - 72x^7 - 5x^4$; *c*) $y' = -72x^7 - 6x^4$;

10. Точка x0 называется точкой минимума функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности x0 выполняется условие

a) $f(x_0) \geq f(x)$ *b*) $f(x_0) = f(x)$ *c*) $f(x_0) \leq f(x)$

11. Найти производную функции $y = \sin(3x+1)$

a) $y' = \cos(3x+1)$ *b*) $y' = 3\cos x$ *c*) $y' = 3\cos(3x+1)$

12. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = t^2 - 2t + 5$. Найти уравнение скорости движения

a) $v(t) = 2t - 2t + 5$ b) $s(t) = t^2$ c) $v(t) = 2t - 2$

13. Найти вертикальные асимптоты функции $y = \frac{9x}{4 - x}$

a) -5 b) 4 c) 2

14. Точка движется прямолинейно по закону $S = 2t^3 + 3t^2 - 2t + 9$. Найти ускорение точки в конце второй секунды.

a) $25\,м/с^2$ *b*) $30\,м/с^2$ *c*) $15\,м/с^2$

15. Уравнение касательной к графику функции имеет вид:

a) $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ *b*) $y + y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ *c*) $y - y_0 = -y'(x_0)(x - x_0)$

16. Найти производную функции $y = x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot x^{1,5}$

a) $3x^2$ *b*) $5x^4$ *c*) $4x^3$

17. Производная функции $y=\sin u$ вычисляется по формуле:
a) $y'=\cos u\cdot u'$ *b*) $y'=-\cos u\cdot u'$ *c*) $y'=\cos u\cdot$

18. Производная функции $y=\cos u$ вычисляется по формуле:
a) $y'=\sin u\cdot u'$ *b*) $y'=-\sin u\cdot u'$ *c*) $y'=-\sin u$

19. Если в некотором промежутке $f'(x)>0$, то функция:
a) Убывает b) Возрастает c) Пересекает ось OX

20. Если в некотором промежутке $f'(x)<0$, то функция:
a) Убывает b) Возрастает c) Пересекает ось OX

21. Найти производную функции $y=\sqrt{1-x^2}$
a) $y'=\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$ *b*) $y'=-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$ *c*) $y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

22. Критические (стационарные) точки – это точки, в которых
a) производная обращается в нуль или терпит разрыв;
b) производная не существует;
c) производная отрицательна.

23. Найти производную функции $y=x+\ln x$ в точке $x_0=1$
a) 1 *b*) 0 *c*) 2

Контрольная работа за 1 семестр
Вариант 1

1. Решить систему уравнений (Ответ: (3,5; -1; -1,5))

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-2z=7 \\ 3x+2y+5z=0 \end{cases}$$

2. Найти определитель матрицы $C=2A-B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ответ: $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 8 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3. Найти площадь треугольника с вершинами
$A(-3;-2;-4)$, $B(-1;-4;-7)$, $C(1;-2;2)$

4. Найти пределы: *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$

Ответ: а)2; б) $\frac{7}{2}$

Вариант 2

1. Решить систему уравнений: (Ответ: (1; -1; 1))

$$\begin{cases} x+y-z=-1 \\ 3x-2y+4z=9 \\ 2x+3y+2z=1 \end{cases}$$

2. Найти определитель матрицы $C=3A+2B$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Ответ: $C=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 0 & 13 & 9 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

3. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$

4. Найти пределы: *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x\ -1}{3x^2-x-2}$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+7x^2+6}{12x^4+5x^3}$

Ответ: а) $\dfrac{3}{5}$;б) $\dfrac{5}{12}$

Вариант 3

1. Решить систему уравнений: (Ответ: (-1; 1; 1))

$$\begin{cases} x-y+z=-1 \\ 2x+3y+4z=5 \\ 3x-2y-2z=-7 \end{cases}$$

2.Найти $C=A^2+3A$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Ответ: $C=\begin{pmatrix} 10 & 11 & 42 \\ 10 & 4 & 44 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

3 Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$

4 Найти пределы: *а)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x\ -5}{x^2-2x-3}$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x\ +3}{2x^2+5x\ -3}$

Ответ: а) $\dfrac{3}{2}$;б) $\dfrac{3}{2}$

Вариант 4

1. Решить систему уравнений: (Ответ: (1; 1; 1))

$$\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 4x+5y-3z=6 \\ 2x+3y-2z=3 \end{cases}$$

2. Найти A^2-3B, если $A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 5\\ 3 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 4 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$

Ответ: $C=\begin{pmatrix}20 & -14 & -22\\ 10 & -10 & -10\\ -12 & 0 & 1\end{pmatrix}$

3. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-1;2;3)$, $B(2;1;4)$, $C(0;-3;4)$

4. Найти пределы: *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-7x+4}{x^2-5x+6}$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$

Ответ: а) $-\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{1}{7}$

Вариант 5

1. Решить систему уравнений: (Ответ: (1;- 1;- 1))

$$\begin{cases}-x+y+z=-3\\ 2x+2y-3z=3\\ 3x+4y+5z=-6\end{cases}$$

2. Найти $C=A+AB$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -4 & 0 & 5\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 1\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$

Ответ: $C=\begin{pmatrix}12 & 19 & 8\\ -26 & 19 & -3\\ 10 & 9 & 9\end{pmatrix}$

3. Найти площадь треугольника с вершинами $A(7;3;4)$, $B(1;0;6)$, $C(4;5;-2)$

4. Найти пределы: *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+5x^2+6}{2x^5+x^3}$

Ответ: а) $\dfrac{1}{3}$; б) 0

Вариант 6

1. Решить систему уравнений: (Ответ: (-1; -1; 1))

$$\begin{cases}-x-y+z=3\\ 5x+2y+3z=-4\\ 3x+4y-2z=-9\end{cases}$$

2. Найти $C=A-A^2$, если $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ -2 & 4 & 0\end{pmatrix}$

Ответ: $C=\begin{pmatrix}-13 & -22 & -9\\ -2 & -17 & -5\\ 2 & -2 & -6\end{pmatrix}$

3. Найти площадь треугольника с вершинами

$A(1;-2;-3)$, $B(-1;-1;-2)$, $C(3;0;-2)$

4.Найти пределы: *а)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-x-12}$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+7x^2+6x}{12x^2+5x-3}$

Ответ: а) $\dfrac{5}{7}$; б) $\dfrac{7}{12}$

Тема 3.3. Интегральное исчисление (У3, З3)

Устный опрос 1

Записать табличные интегралы:

1. $\int dx =$
2. $\int x^{\alpha} dx =$
3. $\int \dfrac{dx}{x} =$
4. $\int a^{x} dx =$

   В частности, $\int e^{x} dx =$
5. $\int \cos x dx =$
6. $\int \sin x dx =$
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} =$
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} =$
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$

   В частности, $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$
10. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} =$

    В частности, $\int \dfrac{dx}{1+x^2} =$

11. Свойства неопределенного интеграла
12. Интегрирование заменой переменной (алгоритм)
13. Какие интегралы находятся интегрированием по частям?
14. Алгоритм интегрированием по частям.
15. Как выделить полный квадрат из квадратного трехчлена?

Устный опрос 2

1. Какая дробь называется рациональной??
2. Какая дробь называется правильной? Как разложить правильную дробь на сумму элементарных дробей?
3. Какая дробь называется неправильной? Как разложить неправильную дробь на сумму элементарных дробей?
4. Запишите четыре основных типа простейших дробей и расскажите об их интегрировании.

5. Метод неопределенных коэффициентов.

Устный опрос 3

1. Что называется определенным интегралом?
2. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
3. Свойства определенного интеграла
4. Формула Ньютона-Лейбница
5. Основные методы интегрирования определенного интеграла

Самостоятельная работа № 1

Вариант 1

Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования (для № 1-5).

1. $\int\left(5\cos x-3x^2+\frac{1}{x}\right)dx$.
2. $\int\frac{3x^8-x^5+x^4}{x^5}dx$.
3. $\int\left(6^x\cdot 3^{2x}-4\right)dx$.
4. $\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.
5. $\int\frac{dx}{1+16x^2}$.

Найти неопределенные интегралы методом подстановки (для № 6-8).

6. $\int(8x-4)^3dx$.
7. $\int\frac{12x^3+5}{3x^4+5x-3}dx$.
8. $\int x^5\cdot e^{x^6}dx$.
9. Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям: $\int(x+5)\cos x dx$.

Вариант 2

Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования (для № 1-5).

1. $\int\left(6\sin x+4x^3-\frac{1}{x}\right)dx$.
2. $\int\frac{x^9-3x^7+2x^6}{x^7}dx$.
3. $\int\left(7^x\cdot 2^{2x}+5\right)dx$.
4. $\int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$.
5. $\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

Найти неопределенные интегралы методом подстановки (для № 6-8).

6. $\int (7x+5)^4 dx$.
7. $\int \frac{18x^2-3}{6x^3-3x+8} dx$.
8. $\int x^7 \cdot e^{x^8} dx$.
9. Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям: $\int (x-2)\sin x dx$.

Самостоятельная работа № 2
Вариант 1

1. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^2 (4x^2+x-3)dx$.
2. Вычислить определенный интеграл методом подстановки: $\int_2^3 (2x-1)^3 dx$.
3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+4, \quad y=0, \quad x=-2, \quad x=2$.
4. Скорость движения точки изменяется по закону $v=3t^2+2t+1$ (м/с). Найти путь *S*, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

Вариант 2

1. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^3 (2x^2-x+4)dx$.
2. Вычислить определенный интеграл методом подстановки: $\int_0^1 (3x+1)^4 dx$.
3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+1, \quad y=0, \quad x=-1, \quad x=1$.
4. Скорость движения точки изменяется по закону $v=9t^2-8t$ (м/с). Найти путь *S*, пройденный точкой за четвертую секунду.

Тест по теме «Интегрирование»

1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x-5}$

   a) $\ln(x-5)+C$ b) $\sin(x-5)+C$ c) $\cos(x-5)+C$

2. Найти интеграл $\int \cos 6x dx$

   a) $-6\sin 6x+C$ b) $\frac{1}{6}\sin 6x+C$ c) $-\frac{1}{6}\sin 6x+C$

3. Формула интегрирования по частям имеет вид:

   a) $\int udv = uv - \int vdu$ b) $\int udv = \int vdu + uv$ c) $\int udv = uv$

4. Площадь криволинейной трапеции определяется по формуле:

a) $S=\int_a^b f(x)dx = F(b)+F(a)$; b) $S=\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$; c) $S=\int_a^b f(x)dx = F(a)-F(b)$

5. Найти интеграл $\int_3^5 dx$

   a)4 b) -2 c) 2

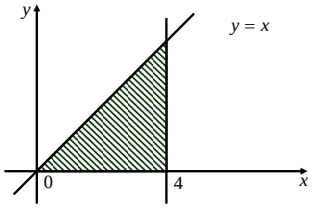
6. Найти интеграл $\int_0^1 (2x+1)dx$

a) 2 b) 4 c) 1

7. Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением $v = t^2 - 8t + 3$. Найти уравнение движения.

$a) S = \frac{1}{3}t^3 - 4t + 3t + C$ $b) S = \frac{1}{3}t^3 + 4t - 3t + C$ $c) S = t^3 - 4t + 3t + C$

8. Вычислить площадь заштрихованной фигуры

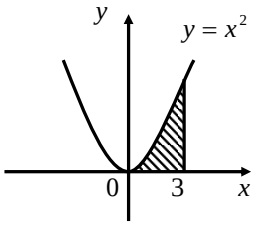


a) 4 *b*) 8 *c*) 5

9. Вычислить площадь заштрихованной фигуры

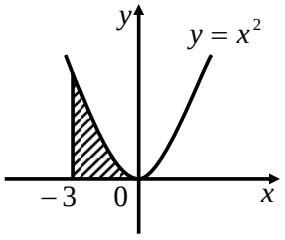
a) 4 *b*) 8 *c*) 9

10. Вычислить площадь заштрихованной фигуры



a) 4 *b*) 9 *c*) 5

11. Найти интеграл $\int 2x^3\,dx$



a) $\frac{x^4}{2} + C$ b) $\frac{x^4}{4} + C$ c) $\frac{x^2}{2} + C$

12. Найти интеграл $\int 3\sin 3x\,dx$

a) $\cos x + C$ b) $-\cos 3x + C$ c) $\cos 3x + C$

13. Найти интеграл $\int -3\sin 3x\,dx$

a) $\cos x + C$ b) $-\cos 3x + C$ c) $\cos 3x + C$

14. Найти интеграл $\int 6\cos 6x dx$

a) $-6\sin 6x + C$ b) $\sin 6x + C$ c) $-\frac{1}{6}\sin 6x + C$

Практическая работа №21
Вычисление неопределённого интеграла непосредственным интегрированием, методом подстановки

Цель: проверить знание определения неопределённого интеграла, его свойства, табличные интегралы; формулы интегрирования при помощи замены переменной, умения вычислять неопределённые интегралы методом замены переменной.

Задание:

1. Найти неопределённые интегралы

1.

1.1. $\int x^3(3x+1)^2 dx$

1.2. $\int -2\sqrt{x}(4-3x)^2 dx$

1.3. $\int \frac{4x^3+x^4--8x^5}{x^3} dx$

1.4. $\int \frac{x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{3}{7}}-x^{\frac{1}{3}}}{x} dx$

1.5. $\int \frac{\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}}{x} dx$

1.6. $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx$

1.7. $\int \frac{3}{1+x^2} dx$

1.8. $\int \left(e^x+2x-4^x+3x^{\frac{1}{2}}\right) dx;$

1.9. $\int \frac{2\cos^3 x+5}{\cos^2 x} dx$

1.10. $\int \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}-6\cos x dx$

1.11. $\int 4x^2(4x+2)^2 dx$

1.12. $\int \frac{x^2-3x^3+2x^7}{x} dx$

1.13. $\int \frac{7x^4-4x^4+6x^4}{x^2} dx$

1.14. $\int \frac{x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{2}{3}}}{x} dx$

1.15. $\int \frac{3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x} dx$

1.16. $\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}} dx$

1.17. $\int \frac{5}{25+x^2} dx$

1.18. $\int \left(\frac{2}{x}+8e^x+5^x-x^{-\frac{2}{3}}\right) dx;$

1.19. $\int \frac{2\cos^2 x-4}{\cos^2 x} dx$

1.20. $\int \frac{1}{2}\sin x+\sqrt[4]{x^7} dx$

1.21. $\int 3\sqrt{x}(2-3x)^2 dx$

1.22. $\int \frac{2x^3+3x^4-5x^6}{x^2} dx$

1.23. $\int \frac{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{4}{7}}-x^{\frac{1}{2}}}{x} dx$

1.24. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^5}-\sqrt{x}}{x} dx$

1.25. $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

1.26. $\int \frac{3}{\sqrt{x^2+4}} dx$

1.27. $\int \frac{2}{2+3x^2} dx$

1.28. $\int \frac{2\sin^3 x+3}{\sin^2 x} dx$

1.29. $\int \frac{1+3\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

1.30. $\int (1-x)\left(2-\sqrt{x}\right)dx$

2.

2.1. $\int \frac{\sqrt{3}}{9x^2-3}dx$

2.2. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+3}}dx$

2.3. $\int \frac{1}{9x^2+3}dx$

2.4. $\int \frac{9}{\sqrt{9x^2-3}}dx$

2.5. $\int \frac{1}{\sqrt{3-9x^2}}dx$

2.6. $\int \frac{1}{7x^2-4}dx$

2.7. $\int \frac{3}{\sqrt{7x^2-4}}dx$

2.8. $\int \frac{1}{5x^2+3}dx$

2.9. $\int \frac{1}{5x^2-3}dx$

2.10. $\int \frac{1}{\sqrt{3-5x^2}}dx$

2.11. $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+3}}dx$

2.12. $\int \frac{1}{\sqrt{4-7x^2}}dx$

2.13. $\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3-4x^2}}dx$

2.14. $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-9}}dx$

2.15. $\int \frac{1}{2x^2+7}dx$

2.16. $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}dx$

2.17. $\int \frac{1}{3x^2+2}dx$

2.18. $\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7-2x^2}}dx$

2.19. $\int \frac{\sqrt{14}}{2x^2-7}dx$

2.20. $\int \frac{1}{8x^2+9}dx$

2.21. $\int \frac{1}{3x^2-2}dx$

2.22. $\int \frac{1}{4x^2+3}dx$

2.23. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+3}}dx$

2.24. $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}}dx$

2.25. $\int \frac{1}{4x^2-3}dx$

2.26. $\int \frac{2}{4+3x^2}dx$

2.27. $\int \frac{2}{\sqrt{4x^2-3}}dx$

2.28. $\int \frac{1}{4x^2+7}dx$

2.29. $\int \frac{1}{8x^2-9}dx$

2.30. $\int \frac{1}{\sqrt{9-8x^2}}\,dx$

3.

3.1. $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$

3.2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln^2(x+1)}}$

3.3. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$

3.4. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{(1-x)}\,dx$

3.5. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^2(1+x)}}{(1+x)}\,dx$

3.6. $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(1+x)}}{(1+x)}\,dx$

3.7. $\int \frac{\sqrt{\ln^5(1+x)}}{(1+x)}\,dx$

3.8. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(1+3x)}}{(1+3x)}\,dx$

3.9. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(3+x)}}{(3+x)}\,dx$

3.10. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^4(x-5)}}{(x-5)}\,dx$

3.11. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}$

3.12. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(1+x)}}{(1+x)}\,dx$

3.13. $\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{(2x-1)}\,dx$

3.14. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$

3.15. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(6+x)}}{(6+x)}\,dx$

3.16. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+4)}}{(x+4)}\,dx$

3.17. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}}$

3.18. $\int \frac{\sqrt{\ln^7(1+x)}}{(1+x)}\,dx$

3.19. $\int \frac{\ln^3(1-x)}{(1-x)}\,dx$

3.20. $\int \frac{\ln^3(x-5)}{(x-5)}\,dx$

3.21. $\int \frac{\ln^7(x-7)}{(x-7)}\,dx$

3.22. $\int \frac{\ln^5(x-8)}{(x-8)}\,dx$

3.23. $\int \frac{\ln^6(x+9)}{(x+9)}\,dx$

3.24. $\int \frac{\ln(3x+5)}{(3x+5)}\,dx$

3.25. $\int \frac{\ln^4(3x+1)}{(3x+1)}\,dx$

3.26. $\int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$

3.27. $\int \frac{dx}{(x-3)\ln^4(x-3)}$

3.28. $\int \frac{dx}{(x+3)\ln^4(x+3)}$

3.29. $\int \frac{dx}{(x-4)\ln^5(x-4)}$ 3.30. $\int \frac{dx}{(x+5)\ln^3(x+5)}$

4

4.1. $\int \sin^4 2x \cdot \cos 2x dx$

4.2. $\int \cos^7 2x \cdot \sin 2x dx$

4.3. $\int \sin^3 4x \cdot \cos 4x dx$

4.4. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} dx$

4.5. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x} dx$

4.6. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx$

4.7. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$

4.8. $\int \frac{\cos x}{3-\sin x} dx$

4.9. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x+3}} dx$

4.10. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x+1}} dx$

4.11. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{(\sin x-4)^3}} dx$

4.12. $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}} dx$

4.13. $\int \sqrt[3]{\cos 2x} \cdot \sin 2x dx$

4.14. $\int \sin^3 5x \cdot \cos 5x dx$

4.15. $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}} dx$

4.16. $\int \sqrt{\cos 7x} \cdot \sin 7x dx$

4.17. $\int \sqrt{\cos^3 2x} \cdot \sin 2x dx$

4.18. $\int \frac{\cos 6x}{\sin^7 6x} dx$

4.19. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos 4x}} dx$

4.20. $\int \frac{\cos 6x}{\sin^4 6x} dx$

4.21. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx$

4.22. $\int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x} dx$

4.23. $\int \sqrt{\cos^3 2x} \cdot \sin 2x dx$

4.24. $\int \frac{\sin 5x}{\cos^4 5x} dx$

4.25. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}} dx$

4.26. $\int \sin^6 3x \cdot \cos 3x dx$

4.27. $\int \sin^4 8x \cdot \cos 8x dx$

4.28. $\int \sin^5 4x \cdot \cos 4x dx$

4.29. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos^4 2x}} dx$

4.30. $\int \frac{\cos 6x}{\sqrt{\sin^3 6x}} dx$

5.

5.1. $\int \frac{\sqrt{arctg^6 3x}}{1+9x^2}dx$

5.2. $\int \frac{\sqrt{arctg^2 x}}{1+x^2}dx$

5.3. $\int \frac{\sqrt{arctg^3 x}}{1+x^2}dx$

5.4. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

5.5. $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

5.6. $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

5.7. $\int \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

5.8. $\int \frac{arctg^3 2x}{1+4x^2}dx$

5.9. $\int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

5.10. $\int \frac{\arccos^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

5.11. $\int \frac{arctg^7 3x}{1+9x^2}dx$ 5.20.

5.12. $\int \frac{\arccos^6 3x}{1+9x^2}dx$

5.13. $\int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

5.14. $\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

5.15. $\int \frac{\arccos 4x}{\sqrt{1-16x^2}}dx$ 23.

5.16. $\int \frac{\arccos^7 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

5.17. $\int \frac{arcctg^4 5x}{1+25x^2}dx$

5.18. $\int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx$

5.19. $\int \frac{1}{(1+x^2)arctg^3 x}dx$

5.20. $\int \frac{1}{(1+x^2)arctg^7 x}dx$

5.21. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{arctgx}}$

5.22. $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctg^5 x}$

5.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}\arcsin^4 x}$

5.24. $\int \frac{\sqrt[3]{arctg2x}}{1+4x^2}dx$

5.25. $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

5.26. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-25x^2)}\arcsin 5x}$

5.27. $\int \frac{arctg^8 3x}{1+9x^2}dx$

5.12. $\int \frac{\arccos^2 7x}{\sqrt{1-49x^2}}dx$

5.29. $\int \frac{\sqrt[5]{arctg^3 x}}{1+x^2}dx$

5.30. $\int \frac{arctg^4 8x}{1+64x^2}\,dx$

6.

6.1. $\int \frac{x-1}{7x^2+4}\,dx$

6.2. $\int \frac{1-2x}{5x^2-1}\,dx$

6.3. $\int \frac{2x+1}{5x^2+1}\,dx$

6.4. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

6.5. $\int \frac{3x-2}{2x^2+7}\,dx$

6.6. $\int \frac{5-x}{3x^2+1}\,dx$

6.7. $\int \frac{x+5}{3x^2+1}\,dx$

6.8. $\int \frac{2x-5}{\sqrt{7x^2+3}}\,dx$

6.9. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

6.10. $\int \frac{3x-2}{3x^2+1}\,dx$

6.11. $\int \frac{x-1}{5-2x^2}\,dx$

6.12. $\int \frac{2x+3}{5x^2+2}\,dx$

6.13. $\int \frac{x-3}{1-4x^2}\,dx$

6.14. $\int \frac{5x-2}{x^2+9}\,dx$

6.15. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{3x^2+2}}\,dx$

6.16. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

6.17. $\int \frac{3x+4}{5-2x^2}\,dx$

6.18. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

6.19. $\int \frac{x-5}{8-4x^2}\,dx$

6.20. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1}}\,dx$

6.21. $\int \frac{2x+3}{1-3x^2}\,dx$

6.22. $\int \frac{x-3}{4x^2+1}\,dx$

6.23. $\int \frac{3x-1}{4-x^2}\,dx$

6.24. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{5x^2+1}}\,dx$

6.25. $\int \frac{2x-4}{x^2+16}\,dx$

6.26. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{5-3x^2}}\,dx$

6.27. $\int \frac{3x-3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

6.28. $\int \frac{3-2x}{x^2-8}\,dx$

6.29. $\int \frac{x+4}{7x^2+3}dx$

7.1. $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$

7.11. $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$

7.2. $\int \sqrt[3]{(1+2x)^2}dx$

7.12. $\int \sqrt[5]{(7-3x)^2}dx$

7.3. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{(1-4x)^3}}dx$

7.13. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{(2+5x)}}dx$

7.4. $\int (8x+5)^{10}dx$

7.14. $\int 2(3x-5)^5 dx$

7.5. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

7.15. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}}dx$

7.6. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

7.16. $\int x^2 \cos(4-x^3)dx$

7.7. $\int x^3 \sin 3x^4 dx$

7.17. $\int x^2 \sin 2x^3 dx$

7.8. $\int \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}dx$

7.18. $\int (2x^3+1)^4 x^2 dx$

7.9. $\int (2x^3+1)^4 x^2 dx$

7.19. $\int e^{-3x^2+1} \cdot x dx$

7.10. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

7.20. $\int \frac{e^x}{(e^x+1)}dx$

7.22. $\int \sqrt[4]{(1-4x)^3}dx$

7.23. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(1-6x)^2}}dx$

7.24. $\int 3(5x-8)^4 dx$

7.25. $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^4}}dx$

7.26. $\int x^2 \cos(x^3+5)dx$

7.27. $\int \frac{\sin 3x}{2+\cos 3x}dx$

7.28. $\int (3x^3-1)^5 x^2 dx$

7.29. $\int e^{x^3+1} \cdot x^2 dx$

7.30. $\int \frac{e^{3x}}{(e^{3x}-1)}dx$

Контрольные вопросы

1. Таблица неопределенных интегралов.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Непосредственное интегрирование.
4. Интегрирование заменой переменной.

Практическая работа № 22
Интегрирование по частям

Цель: Проверить уровень усвоения материала по методу интегрирования по частям

Задания

1. Найти интегралы методом интегрирования по частям

1. $\int x\cos 6x\,dx$
2. $\int x\sin(x-5)dx$
3. $\int \arcsin 3x\,dx$
4. $\int arctg\,8x\,dx$
5. $\int x\sin(x-2)dx$
6. $\int \arcsin 8x\,dx$
7. $\int x\sin(x+3)dx$
8. $\int x\cos(x+4)dx$
9. $\int \arccos 7x\,dx$
10. $\int \ln(2x-4)dx$
11. $\int x\cos(x-7)dx$
12. $\int \ln(x+12)dx$
13. $\int (x-4)e^{x}\,dx$
14. $\int x\,e^{-6x}\,dx$
15. $\int arctg\,7x\,dx$
16. $\int \arcsin 5x\,dx$
17. $\int \ln(x-7)dx$
18. $\int x\cos(x+6)dx$
19. $\int arctg\,\frac{x}{2}dx$
20. $\int \ln(x+8)dx$
21. $\int arctg\,\frac{x}{5}dx\,1$
22. $\int \arcsin\frac{x}{5}dx$
23. $\int \arccos 2x\,dx$
26. $\int \arccos\frac{x}{5}dx$
27. $\int arctg\,\frac{x}{4}dx$
28. $\int \arcsin\frac{x}{7}dx$
29. $\int arctg\,6x\,dx$
30. $\int \arccos\frac{x}{3}dx$

2. *Найти интеграл* $\int(\kappa x+\kappa)e^{\kappa x}\,dx$, где к – порядковый номер в журнале

3. *Найти интеграл* $\int(\kappa x-4)\sin kx\,dx$, где к – порядковый номер в журнале

Контрольные вопросы

1. Какие интегралы находятся методом по частям?
2. Алгоритм решения методом по частям

Практическая работа № 23
Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Цель: Проверить уровень усвоения материала и правила нахождения интегралов, содержащих квадратный трехчлен.

Задания

1.

1. $\int \frac{dx}{4x^2-5x+4}$
2. $\int \frac{dx}{x^2+4x+10}$
3. $\int \frac{dx}{5x^2+2x+7}$
4. $\int \frac{dx}{2x^2+x-6}$

3

5. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+7}$
6. $\int \frac{dx}{2x^2-11x+2}$
7. $\int \frac{dx}{2x^2+x+2}$
8. $\int \frac{dx}{3x^2-12x+3}$

9.

9. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+5}$
10. $\int \frac{dx}{2x^2-3x-2}$
11. $\int \frac{dx}{2x^2+3x}$
12. $\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$
13. $\int \frac{dx}{5x-x^2-6}$
14. $\int \frac{dx}{x^2+4x+25}$
15. $\int \frac{dx}{2x^2-8x+30}$
16. $\int \frac{dx}{3x^2-9x+6}$
17. $\int \frac{dx}{2x^2-6x+1}$
18. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+2}$
19. $\int \frac{dx}{1-2x-3x^2}$
20. $\int \frac{dx}{2x^2+3x+6}$
21. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$
22. $\int \frac{dx}{2x-3-4x^2}$
23. $\int \frac{dx}{3x^2-8x-3}$
24. $\int \frac{dx}{x^2+7x+11}$
25. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}$
26. $\int \frac{dx}{5x^2-10x+25}$
27. $\int \frac{dx}{2x^2+6x+3}$
28. $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$
29. $\int \frac{dx}{3x^2+5x+1}$

2.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-2x^2}}$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-3x^2}}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3-x^2}}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-x+4}}$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-3x^2}}$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+4}}$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2-2x^2}}$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-8x+1}}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2x^2}}$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-2x^2}}$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-x+5}}$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+1}}$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-x^2}}$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-10x+4}}$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$

3.

1. $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4}dx$

11. $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}dx$

2. $\int \frac{x-4}{3x^2+x-1}dx$

3. $\int \frac{x+6}{3x^2+x+1}dx$

4. $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6}dx$

5. $\int \frac{xdx}{2x^2+x+5}dx$

6. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$

7. $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx$

8. $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8}dx$

9. $\int \frac{x+4}{2x^2-7x+1}dx$

10. $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2}dx$

11. $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5}dx$

12. $\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3}dx$

13. $\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13}dx$

14. $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1}dx$

15. $\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}dx$

16. $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4}dx$

17. $\int \frac{2x-1}{2x^2+8x-6}dx$

18. $\int \frac{2-x}{4x^2+16x-12}dx$

19. $\int \frac{2x-1}{3x^2-6x+9}dx$

20. $\int \frac{2x-1}{3+x-2x^2}dx$

$\int \frac{3x+1}{x^2-4x-2}dx$

23. $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4}dx$

24. $\int \frac{2x+3}{3x^2+2x-7}dx$

25. $\int \frac{x-3}{4x^2+2x-3}dx$

26. $\int \frac{x+2}{3x^2-x+5}dx$

27. $\int \frac{3x-2}{x^2+5x-1}dx$

28. $\int \frac{x-7}{x^2+5x-1}dx$

29. $\int \frac{2x+1}{5x^2+2x+10}dx$

30. $\int \frac{x-4}{5x^2-x+7}dx$

4.

1. $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}}dx$

2. $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}}dx$

3. $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}dx$

4. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}}dx$

5. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx$

6. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$

7. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}}dx$

8. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$

9. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}}dx$

10. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$

11. $\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}}dx$

12. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}}dx$

13. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx$

14. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}}dx$

15. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$

16. $\int \frac{x-7}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx$

17. $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx$

18. $\int \frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}}dx$

19. $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx$

20. $\int \frac{x-8}{\sqrt{4x^2+x-5}}dx$

21. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2+3x-x^2}}dx$

22. $\int \frac{x-6}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

23. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}}dx$

24. $\int \frac{x-9}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$

25. $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}}dx$

26. $\int \frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-6x+1}}dx$

27. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+9x-4}}dx$

28. $\int \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2-x+5}}dx$

29. $\int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-5+1}}dx$

30. $\int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}}dx$

Контрольные вопросы

1. Как выделить полный квадрат из квадратного трехчлена?
2. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
3. Запишите таблицу основных неопределенных интегралов.
4. Расскажите об интегрировании с использованием подведения под знак дифференциала.

Практическое занятие № 24
Интегрирование рациональных функций

Цель: Проверить уровень усвоения материала по интегрированию рациональных функций.

1. Найти неопределенные интегралы

1. $\int \frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx$;
2. $\int \frac{12}{(x^2-2x-3)(x-2)}dx$;
3. $\int \frac{43x-67}{(x^2-x-12)(x-1)}dx$;
4. $\int \frac{2x^4+8x^3+9x^2-7}{(x^2+x-2)(x+3)}dx$;
5. $\int \frac{8x}{(x^2+6x+5)(x+3)}dx$;
6. $\int \frac{6x}{(x^3-1)}dx$;
7. $\int \frac{2x+22}{(x^2-2x+10)(x+2)}dx$;
8. $\int \frac{5x^2+17x+36}{(x^2+6x+13)(x+1)}dx$;
9. $\int \frac{6x^2+6x-6}{(x^2+x-2)(x+1)}dx$;
10. $\int \frac{37x-85}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$;

1.11 $\int \frac{3x^2+3x-24}{(x^2-x-2)(x-3)}dx$;
1.12 $\int \frac{3x^2-15}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx$;
1.13 $\int \frac{x^2-19x+6}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx$;
1.14 $\int \frac{6x^2}{(x^2+3x+2)(x-1)}dx$;
1.15 $\int \frac{2x^2-26}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx$;
1.16 $\int \frac{2x^2+12x-6}{(x^2+8x+15)(x+1)}dx$;
1.17 $\int \frac{7x^2-17x}{(x^2-2x-3)(x-2)}dx$;
1.18 $\int \frac{3x^2-17x+2}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx$;
1.19 $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)(x-1)}dx$;
1.20 $\int \frac{x+2}{(x^3+x^2)}dx$;

1.21 $\int \frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)}dx$
1.22 $\int \frac{2x^2+2x-1}{(1-x)x^2}dx$
1.23 $\int \frac{2x^2-5x+1}{x(x^2-2x+1)}dx$
1.24 $\int \frac{-x^2+3x-2}{x(x+1)^2}dx$
1.25 $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$
1.26 $\int \frac{x+2}{x(x^2-2x+1)}dx$
1.27 $\int \frac{4x}{(x^2-1)(x+1)}dx$
1.28 $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2}dx$
1.29 $\int \frac{3x^2-7x+2}{x(x-1)^2}dx$
1.30 $\int \frac{x^2+x+2}{x^2(x+1)}dx$

2. Найти неопределенные интегралы

1 $\int \frac{3x+13}{(x^2+2x+5)(x-1)}dx$;
2. $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x^2+2x+5)(x-1)}dx$;
3. $\int \frac{36}{(x^2-2x+10)(x+2)}dx$;

1.11 $\int \frac{x^2-6x+8}{(x^3+8)}dx$;
1.12 $\int \frac{x^2+3x-6}{(x^2+6x+13)(x+11)}dx$;
1.13 $\int \frac{9x-9}{(x^2-4x+13)(x+1)}dx$;

1.21 $\int \frac{12-6x}{(x^2-4x+13)(x+1)}dx$
1.22 $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$
1.23 $\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx$

4. $\int \frac{4x^2+3x+17}{(x^2+2x+5)(x-1)}dx$;

5. $\int \frac{4x-x^2-12}{(x^3+8)}dx$;

6. $\int \frac{6-9x}{(x^3+8)}dx$;

7. $\int \frac{2x+3}{(x^2-9)}dx$;

$\int \frac{x^2+23}{(x^2+6x+13)(x+1)}dx$

8. $\int \frac{2x^2+7x+7}{(x^2+2x+5)(x-1)}dx$;

9. $\int \frac{8}{(x^2+6x+13)(x+1)}dx$;

10. $\int \frac{4x^2+x+10}{(x^3+8)}dx$;

1.14 $\int \frac{4x+2}{x^2(x^2+4)}dx$;

1.15 $\int \frac{x^2-13x+40}{(x^2-4x+13)(x+1)}dx$;

1.16 $\int \frac{4x-10}{(x^2-2x+10)(x+2)}dx$;

1.17 $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x^2-2x+5)(x-1)}dx$;

1.18 $\int \frac{19x-x^2-34}{(x^2-4x+13)(x+1)}dx$;

1.19 $\int \frac{2x^2+4x+20}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$;

1.20 $\int \frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$;

1.24 $\int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$

1.25 $\int \frac{3-9x}{(x^3-1)}dx$

1.26 $\int \frac{x+2}{x(x^2-2x+1)}dx$

1.27

1.28 $\int \frac{4x^2+38}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$

1.29 $\int \frac{5x+13}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$

1.30 $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x^3-1)}dx$

Контрольные вопросы

1. Какая дробь называется рациональной?
2. Какая дробь называется правильной? Как разложить правильную дробь на сумму элементарных дробей?
3. Какая дробь называется неправильной? Как разложить неправильную дробь на сумму элементарных дробей?
4. Запишите четыре основных типа простейших дробей и расскажите об их интегрировании.
5. Расскажите о методе неопределенных коэффициентов.

Практическое занятие № 25
Вычисление определенного интеграла

Цель: Повторение, обобщение и систематизация материала по данной теме.

Задания

1. Вычислить определенный интеграл методом непосредственного интегрирования

1. $a)\int_1^2 (3x^2-2x)dx$; $b)\int_{\Pi}^{2\Pi} \frac{\cos x}{6}dx$

2. $a)\int_{-2}^{1} (x^2-x)dx$; $b)\int_{-\Pi/6}^{\Pi/6} \frac{6dx}{cos^2 2x}$

11. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\cos^2 \frac{1}{2}x}dx$; $b)\int_2^3 (1-x)^4 dx$

12. $a)\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos\frac{1}{3}x dx$; $b)\int_{-1}^{4} (1+\frac{x}{2})^8 dx$

21. $a)\int_1^2 (4x^3-3x^2)dx$; $b)\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$

22. $a)\int_0^{\frac{\pi}{9}} (2\cos 3x)dx$; $b)\int_0^2 (1-\frac{x}{2})^4 dx$

3. a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x\,dx$

b) $\int_{0}^{2}(1-\frac{x}{2})^4\,dx$

4. a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{\cos^2 x}\,dx$

b) $\int_{-1}^{4}(1+\frac{x}{2})^8\,dx$

5. a) $\int_{1}^{2}(4x^3+2x)dx$

b) $\int_{0}^{\Pi}\frac{3dx}{\cos^2(\frac{x}{2}-\frac{\Pi}{3})}$

6. a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(4\cos 2x)dx$

b) $\int_{1}^{5}\sqrt{9x-1}dx$

7. a) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(6\sin 2x)dx$

b) $\int_{1}^{2}(3-2x)^4\,dx$

8. a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{5}{\cos^2 x}dx$

b) $\int_{-3}^{1}\frac{dx}{5-3x}$

9. a) $\int_{0}^{2}(x^3-x^2+3)dx$

b) $\int_{1}^{2}e^{2x+3}dx$

10. a) $\int_{1}^{2}(x^4-x^3+2)dx$

b) $\int_{0}^{1}5^{4-3x}dx$

13. a) $\int_{2}^{3}(3x^2-2x)dx$

b) $\int_{-\Pi/2}^{\Pi/2}3\sin x\,dx$

14. a) $\int_{0}^{\pi}\left(3\sin\frac{1}{2}x\right)dx$

b) $\int_{1}^{0}(1-2x)^4dx$

15. a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(36\cos 2x)dx$

b) $\int_{-2}^{3}\frac{2dx}{(3-x^2)}dx$

16. a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx$

b) $\int_{2}^{3}(1-2x)^4\,dx$

17. a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\frac{36}{\cos^2 2x}dx$

b) $\int_{2}^{3}(3-x^2)dx$

18. a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x)dx$

b) $\int_{0}^{4}(x^2+1)dx$

19. a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx$

b) $\int_{2}^{3}(7-2x)^4\,dx$

20. a) $\int_{0}^{2}(x^3-x)dx$

b) $\int_{0}^{\Pi/3}3\sin 3x\,dx$

23 a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{12}}(108\sin 6x)dx$

b) $\int_{-1}^{1}(7-5x)dx$

24 a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\frac{4}{\cos^2 2x}dx$

b) $\int_{-2}^{1}(4x^3+6x)dx$

25. a) $\int_{1}^{2}(5x^4-6x^2)dx$

b) $\int_{1}^{9}\sqrt{8x-5}dx$

26. a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{5}{\sin^2 x}dx$

b) $\int_{-2}^{0}(x^5-3x^2)$

27 a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2\sin x)dx$

b) $\int_{1}^{2}(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^3})dx$

28. a) $\int_{1}^{3}(3x^2+4x^3)dx$

b) $\int_{\Pi/4}^{\Pi/8}\frac{\cos 4x}{2}dx$

29. a) $\int_{2}^{3}(2x^3-2x)dx$

b) $\int_{0}^{\Pi/6}\frac{4dx}{\cos^2 2x}$

30. a) $\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}}(2\sin 3x)dx$

b) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+4}$

2. Вычислить определенный интеграл методом замены переменной

1. $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}dx$ 11. $\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}dx$ 21. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

2. $\int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ 12. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$ 22. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$

3. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$ 13. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$ 23. $\int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$

4. $\int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$ 14. $\int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$ 24. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$

5. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$ 15. $\int_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}dx$ 26 $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}dx$

6. $\int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$ 16. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin xdx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$ 26. $\int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$

7. $\int_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$ 17. $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$ 27. $\int_1^5 \frac{x^2dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$

8. $\int_0^4 \frac{10xdx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$ 18. $\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$ 28. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$

9. $\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{\left(x^4+4\right)}}$ 19. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$ 29 $\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}dx$

10. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ 20. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ 30. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin xdx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$

3. Вычислить определенный интеграл

1. $\int_0^1 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$ 11. $\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$ 21. $\int_4^5 \frac{dx}{x^2(x-1)}$

2. $\int_2^3 \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}dx$ 12. $\int_3^5 \frac{(x^2+2)dx}{(x^2+1)(x-1)}$ 22. $\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$

3. $\int_2^3 \frac{x+2}{x^2(x-1)}dx$ 13. $\int_0^1 \frac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}dx$ 23. $\int_7^9 \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx$

4. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2(x-1)}$ 14. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$ 24. $\int_4^6 \frac{xdx}{x^3-6x^2+16-6}$

5. $\int_{-1}^1 \frac{y^5dy}{y+2}$ 15. $\int_8^{10} \frac{(x^2+3)dx}{x^3-x^2-6x}$ 25. $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+1}$

6. $\int_2^3 \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$ 16. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4+x^2}$ 26. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^5+1}{x^6+x^4}dx$

7. $\int_{1/3}^{1/2} \frac{x\,dx}{(x-1)^3}$

8. $\int_{4}^{5} \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$

9. $\int_{3}^{4} \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$

10. $\int_{0}^{1} \frac{(2x+3)dx}{(x-3)^3}$

17. $\int_{2}^{3} \frac{x^7 dx}{1-x^4}$

18. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^4-1}$

19. $\int_{-1}^{0} \frac{x\,dx}{x^3-1}$

20. $\int_{0}^{\sqrt{3}/3} \frac{2x^2+4}{x^3-x^2+x+1}dx$

27. $\int_{2}^{3} \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2}dx$

28. $\int_{3}^{5} \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx$

29. $\int_{0}^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{x^4-1}$

30. $\int_{-1}^{0} \frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2}dx$

Контрольные вопросы

1. Что называют определенным интегралом функции $f(x)$?
2. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
3. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.
5. Запишите свойства определенного интеграла.
6. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
7. Расскажите об основных методах интегрирования определенного интеграла.

Практическая работа № 26
Вычисление определенного интеграла заменой переменной и по частям

Цель: Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление определенного интеграла». Закрепить и систематизировать знания по теме. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности учащихся.

Задания

1.

1.1 $a)\int_{0}^{\sqrt{3}} x^3\sqrt[3]{1+x^2}dx$ $b)\int_{0}^{2}(2-x)^2 dx$

1.2 $a)\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^3}}$ $b)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(3-\sin x)^2}$

1.11 $a)\int_{-1}^{2} \frac{6x^2 dx}{(x^3-5)^2}$ $b)\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\cos x dx$

1.12 $a)\int_{0}^{1} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4+1}}$ $b)\int_{0}^{\sqrt{3}} x\sqrt{25-3x^2}dx$

1.21 $a)\int_{2\sqrt{2}}^{4} 3x\sqrt{x^2-7}dx$ $b)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx$

1.22 $a)\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$ $b)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(8-7\sin x)^2}$

1.3 $a)\int_{-1/3}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$ $b)\int_{1}^{2}\frac{\left(2x^2+1\right)dx}{x}$

1.4 $a)\int_{3/4}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$ $b)\int_{1}^{2}\frac{xdx}{\left(2x^2+4\right)^4}$

1.5 $a)\int_{0}^{1}\frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$ $b)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{Cosxdx}{\left(5-\sin x\right)^2}$

1.6 $a)\int_{3/4}^{4/3}\frac{dx}{x^2+1}$ $b)\int_{0}^{\sqrt{3}}x\sqrt[5]{1+x^2}dx$

1.7 $a)\int_{0}^{-3}\frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$ $b)\int_{0}^{\pi/6}\frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}dx$

1.8 $a)\int_{0}^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+4}}$ $b)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}3\cos 2xdx$

1.9 $a)\int_{1}^{e}\frac{3\ln^2 x}{x}dx$ $b)\int_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{8-7x^3}}$

1.10 $a)\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$ $b)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{\left(8-\sin x\right)^2}$

1.13 $a)\int_{0}^{1}x^3\sqrt{4+5x^4}dx$ $b)\int_{1}^{2}\frac{\left(x-1\right)dx}{x^3}$

1.14 $a)\int_{0}^{3}6x^3\left(3x^4-1\right)^2dx$ $b)\int_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{8-7x^3}}$

1.15 $a)\int_{0}^{1}\left(2x^3+1\right)^4x^2dx$ $b)\int_{0}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{9+2x^3}}$

1.16 $a)\int_{0}^{1/2}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $b)\int_{4}^{9}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}dx$

1.17 $a)\int_{0}^{1}\left(e^x-1\right)^4e^xdx$ $b)\int_{0}^{1/4}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$

1.18 $a)\int_{-3/4}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$ $b)\int_{0}^{4}\frac{10xdx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$

1.19 $a)\int_{0}^{1}\left(4x^3+1\right)^5x^2dx$ $b)\int_{0}^{1}x^2e^{x^3+1}dx$

1.20 $a)\int_{0}^{\pi/6}\frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}dx$ $b)\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{32xdx}{\left(x^2+1\right)^5}$

1.23 $a)\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$ $b)\int_{1}^{e^{e^3}}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

1.24 $a)\int_{-1}^{0}\frac{dx}{4x^2-9}$ $b)\int_{1}^{3}\sqrt{\left(2x+1\right)^3}dx$

1.25 $a)\int_{0}^{1/4}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$ $b)\int_{4}^{5}\left(4-x\right)^3dx$

1.26 $a)\int_{0}^{1/2}\frac{dx}{(2x-1)^2}$ $b)\int_{1}^{e}\frac{5\ln^2 x}{x}dx$

1.27 $a)\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$ $b)\int_{0}^{1}\left(x^3-4\right)dx$

1.28 $a)\int_{3}^{8}\sqrt{x+1}dx$ $b)\int_{0}^{2}\frac{xdx}{\left(x^2-1\right)^3}$

1.29 $a)\int_{0}^{4}\frac{10xdx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$ $b)\int_{\frac{2\pi}{9}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$

1.30 $a)\int_{1}^{5}\frac{x^2dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$ $b)\int_{0}^{1}e^{x^2}xdx$

2.

2.1 $\int_2^3 x\ln(x-1)dx$ $\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x dx$ $\int_2^3 (3-x)e^x dx$

2.2 $\int_{-2}^0 x^2 e^{-x/2}dx$ $\int_0^1 arctg\sqrt{x}dx$ $\int_{1/2}^1 \arcsin(1-x)dx$

2.3 $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ $\int_0^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2}dx$ $\int_1^{\sqrt{3}} arctg\frac{1}{x}dx$

2.4 $\int_0^{\pi/2} x^2\sin x dx$ $\int_0^{\pi/8} x^2\sin 4x dx$ $\int_{-1}^0 x\ln(1-x)dx$

2.5 $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$ $\int_1^2 x^2\ln x dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x}\cos x dx$

2.6 $\int_1^2 (x-1)\ln x dx$ $\int_1^e (x+1)\ln x dx$

$\int_{-1}^0 (2x+3)e^{-x}dx$

2.7 $\int_{-1/2}^0 xe^{-2x}dx$ $\int_{3/2}^2 arctg(2x-3)dx$ $\int_{-1}^0 (x+1)e^{-2x}dx$

2.8 $\int_1^2 xe^x dx$ $\int_0^{\pi/2} (x+3)\sin x dx$ $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$

2.9 $\int_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}}dx$ $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$ $\int_0^1 xarctgxdx$

2.10 $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$ $\int_{-3}^0 (x-2)e^{-x/3}dx$ $\int_1^2 \ln(3x+2)dx$

Контрольные вопросы

1. Что называют определенным интегралом функции *f*(*x*)?
2. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
3. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции *f*(*x*) на отрезке [*a*,*b*].
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции *f*(*x*) на отрезке [*a*, *b*].
5. Запишите свойства определенного интеграла.
6. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
7. Расскажите об основных методах интегрирования определенного интеграла.

Практическое занятие № 27
Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла

Цель: реализация дифференцированного подхода к обучению; обеспечить повторение основных понятий

Задания

1.1 $y = 8x - x^2 - 7$ и осью ох

1.2 $y = x^3 - 1$, y = 0, x = 0

1.3 $y = x^2 - 3x - 4$ и осью ОХ

1.4 $y^2 = 4x$ *и* $x^2 = 4y$

1.5 $y = 5x - x^2 + 6$ и осью ОХ

1.6 $y = x^3$, $y = x^2$, x = −1, x = 0

1.7 $y = x^2 - 6x + 8$ и осью ОХ

1.8 $y = x^2$ и $y = x + 2$

1.9 $y = x^2 - 4x - 5$ и осью ОХ

1.10 *y = 6x −3x² и осью ОХ*

2.1 $y = x^2 + 2$ и $y = 2x + 2$

2.2 y = x ² и $y = 2 - x^2$

2.3 $xy = 6$ и $y + x - 7 = 0$

2.4 $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, x = 0, x =2

2.5 $y = \ln x$, x =e , y =0

2.6 $y = \frac{4}{x^2}$, x =1, y = x − 1

2.7 $y = x^2 + x$, $y = 1 - x^2$, x = 0 , x = 1

2.8 $y = x^3$, x = 2

2.9 $y = \cos x$, x = 0, x = 2π, y = 0

2.10 y = $\sqrt{x}$, y = 2, x = 0

3.1 y = x − y + 3, x + y −1= 0, y = 0

3.2 2x − 3y + 6 = 0, y =0 и x = 3

3.3 $y = x^2 - 2x + 3$ и y = 3x −1

3.4 x − y +2 = 0, y =0, x = −1, x = 2

3.5 y ² = 4x, x = 1 и осью ОХ

3.6 $y = x^2$ и y = −3x

3.7 x − y +3 =0 , x + y −1= 0, y = 0

3.8 x ² = 3y и y = x

3.9 x ² + y ² = 9

3.10 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Контрольные вопросы

1. Что такое криволинейная трапеция?
2. Формула Ньютона-Лейбница
3. Графики элементарных функций.

Тема. 3.4. Теория рядов (У3, З3)

Устный опрос

1. Дать определение числового ряда.
2. Что называется суммой ряда?
3. Виды рядов.
4. Необходимый признак сходимости рядов.
5. Признак сравнения положительных рядов.
6. Признак Даламбера.
7. Радикальный признак Коши.

Устный опрос

1. Понятие знакочередующегося ряда.
2. Признак Лейбница.
3. Абсолютная и условная сходимость
4. Понятие степенного ряда.
5. Ряд Тейлора и Маклорена.

Практическое занятие № 28
Исследование сходимости положительных рядов

Цель: Проверить знание признаков сходимости рядов

Задания

1.Найти первые пять членов данного ряда и исследовать на сходимость:

1. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n-1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$;
2. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!}$;
3. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}$;
4. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)^2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}\sqrt[4]{n+1}}$;
5. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n+2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$;
6. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{n+2}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n^3}$;
7. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4}{(n^2 2)2^n}$;
8. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;
9. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n\cdot(n+1)}$;
10. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n^3}\cdot 3n}$;

2.Написать формулу n-го члена ряда по данным первых его членов

1. $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4}$.....
2. $\frac{1}{4},-\frac{2}{9},\frac{3}{16},-\frac{4}{25}$....
3. $1,\frac{\sqrt{2}}{1\cdot 2},\frac{\sqrt{3}}{1\cdot 2\cdot 3},\frac{\sqrt{4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$
4. $1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16}$.....
5. $\frac{2}{4},-\frac{4}{9},\frac{6}{16},-\frac{8}{25}$....
6. $\frac{3}{2},\frac{5}{4},\frac{9}{8},\frac{17}{16}$....
7. $\frac{1}{9},\frac{1\cdot 2}{25},\frac{1\cdot 2\cdot 3}{49},\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{81}$....
8. $\frac{2}{5},-\frac{3}{8},\frac{4}{11},-\frac{5}{14}$....
9. $\frac{1}{3\cdot 6},\frac{1}{5\cdot 8},\frac{1}{7\cdot 10},\frac{1}{9\cdot 12}$.....
10. $\frac{2}{1},\frac{4}{4},\frac{8}{9},\frac{16}{16}$....

3.Вычислить сумму членов ряда

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}+...$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{n-1}}+...;$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^{2}\cdot(n+1)^{2}}=\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\ldots+\frac{2n+1}{n^{2}\cdot(n+1)^{2}}+\ldots;$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\ldots$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^{2}-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\ldots+\frac{1}{4n^{2}-1}+\ldots$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n}}+\ldots;$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n}}=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n}{2^{n}}+\ldots;$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{2}}=1-\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}-\frac{1}{4^{2}}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{2}}+\ldots;$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}+\ldots;$

4.Исследовать на сходимость, применяя необходимый признак сходимости

1. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{4n+5}$
2. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n-1}$
3. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{5n+2}$
4. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3}-4n^{2}+1}{n^{2}-5n}$
5. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^{2}+1}{n^{3}+2n}$
6. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)\cdot 2^{n}}$
7. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$
8. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$
9. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n+1}$
10. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^{2}}{3n-1}$

5.Исследовать на сходимость, используя признак Даламбера

1. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}}{n!}$
2. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{3})^{n}}$
3. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}\cdot n^{2}}{5^{n}}$
4. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{n}}{n^{n}}$
5. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3\cdot 2^{n}}$
6. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{3^{n}}$
7. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4}}$
8. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}}{n(n+1)}$
9. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$
10. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n}}{n^{5}}$

Контрольные вопросы

1. Определение числового ряда.

2. Свойства и виды рядов.
3. Определение суммы ряда.
4. Необходимый признак сходимости.
5. Признаки сравнения, признаки Даламбера и Коши.

Практическое занятие № 29
Исследование сходимости знакочередующихся рядов

Цель: Проверить знания, умения и навыки решения зданий по данной теме.

Задания

1.Написать в развёрнутом виде и исследовать на сходимость ряд:

1. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n-1}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$;
2. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!}$;
3. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}$;
4. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)^2}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}\sqrt[4]{n+1}}$;
5. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n+2}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$;
6. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{n+2}}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n^3}$;
7. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n+1}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4}{(n^2 2)2^n}$;
8. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;
9. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n\cdot(n+1)}$;
10. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n^3}\cdot 3n}$;

2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость

1. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1^{n-1}\right)2n}{50n+5}$; $c)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$
2. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2n}{3n+5}\right)^n$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 5^n}$; $c)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}$
3. $a)\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-3)}{n^2-1}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(-1)^n}{n(n+2)}$; $c)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}$
4. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n+1)^n}$; $b)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln n}$; $c)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}$

5. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{100n+1}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)(-1)^n}{n^2+3n}$; $c)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$

6. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{2n!}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}$; $c)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)\cdot n}$

7. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n+1}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\sqrt[5]{n^3+1}}$; $c)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

8. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$; $c)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{n}}$

9. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot(n^2+1)}$; $c)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n\cdot(n+1)}$

10. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^n}$; $c)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+5}{3^n}$

Контрольные вопросы

1. Дать определение знакочередующегося ряда
2. Признак Лейбница
3. Абсолютная и условная сходимость

Практическое занятие № 30
Разложение функции в степенной ряд

Цель: Проверить навыки разложения функций в степенной ряд. Вычисление интервала сходимости степенного ряда.

Задания

1. Дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n x^n}{b^n\sqrt{n+1}}$

При заданных значениях a и b написать первые три члена ряда, найти интервал сходимости ряда.

1. *a =5, b=8*
2. *a=2, b=4*
3. *a=3, b=4*
4. *a=7, b=5*
5. *a=5, b=7*
6. *a=2, b=6*
7. *a=8, b=3*
8. *a=7, b=4*
9. *a=3, b=7*

2. *a=4, b=5* Разложить функцию в ряд Маклорена

1. $f(x)=e^{6x}$
2. $f(x)=\cos\frac{x}{2}$
3. $f(x)=\ln(1+4x)$
4. $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$
6. $f(x)=\sin 3x$
7. $f(x)=e^{-x^2}$
8. $f(x)=\sin\sqrt{x}$
9. $f(x)=\cos 5x^2$

5. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 10. $f(x)=\sqrt{1-x}$

3. Исследовать на сходимость ряд

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{n}{5^n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n}\cdot(n+1)^3$
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$

Контрольные вопросы

1. Определение степенного ряда.
2. Определение радиуса и области сходимости
3. Определение ряда Тейлора и Маклорена
4. Формулы разложения элементарных функций

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

   $a)\,a_n=\frac{1}{4n^2+1}$ $b)\,a_n=\frac{2^n}{n!}$

2. Найти формулу общего члена ряда:

   $a)\ 2+4+8+16+.....$ $b)\ \frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ .....$

3. Установить расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+4}$ с помощью достаточного признака расходимости ряда.
4. Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряд:

   $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2n}$

Вариант 2

1. Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

   $a)\,a_n=\frac{2n+1}{n^2}$ $b)\,a_n=\frac{n}{(n+1)\cdot 2^n}$

2. Найти формулу общего члена ряда:

$a)\ \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\ldots\ldots$ $b)1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ \ \ldots\ldots$

3. Установить расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{2n+1}$ с помощью достаточного признака расходимости ряда.
4. Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряд:

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ $b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость ряд:

$a)1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ \ \ldots\ldots$ $b)1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+\ \ \ldots\ldots$

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ $a)\ \frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\ \ \ldots\ldots$

Вариант 2

1. Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость ряд:

$a)1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \ \ldots\ldots$ $b)1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ \ \ldots\ldots$

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$ $a)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ \ \ldots\ldots$

Тема. 3.5 Дифференциальные уравнения (У4, З2)

Устный опрос

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Что называют порядком дифференциального уравнения?
3. Дайте определение общего решения дифференциального уравнения.
4. Что называют условиями Коши?
5. Что называют задачей Коши?
6. Дайте определение частного решения дифференциального уравнения.
7. Какие уравнения называются дифференциальными уравнениями II порядка?
8. Понятие характеристического уравнения.
9. Общее решение уравнения характеристического уравнения.

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

Являются ли данные функции решениями данных дифференциальных уравнений.

1. $y=c_1e^{-5x}+c_2e^{x},\quad y''+4y'-5y=0.$
2. $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x},\quad y''+2y'+y=0.$
3. $y=\frac{8}{x},\quad y'=-\frac{1}{8}y^2.$
4. $y=e^{4x}+2,\quad y'=4y.$
5. Решить задачу Коши: $y'=4x^3-2x+5,\quad y(1)=8.$

Вариант 2

Являются ли данные функции решениями данных дифференциальных уравнений.

1. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}, \quad y'' + 4y' + 4y = 0$.
2. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x}, \quad y'' - y' - 6y = 0$.
3. $y = e^{3x} - 5, \quad y' = 3y + 15$.
4. $y = \frac{5}{x}, \quad y' = -y^2$.
5. Решить задачу Коши: $y' = 3x^2 - 2x + 6, \quad y(2) = 19$.

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. Найти частные решения дифференциальных уравнений:
   a) $(x+3)dy-(y+2)dx=0,$ *если* $y=3$ *при* $x=2$
   b) $y'+2y+4=0,$ *если* $y=5$ *при* $x=0$
2. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(1;2)$ и имеющей угловой коэффициент $k=\frac{1}{2x}$ в любой точке касания.

Вариант 2

1. Найти частные решения дифференциальных уравнений:
   a) $(1-x)dy-(y-1)dx=0,$ *если* $y=3$ *при* $x=2$
   b) $y'-y+4=0,$ *если* $y=5$ *при* $x=0$
2. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(2;1)$ и имеющей угловой коэффициент $k=\frac{1}{2y}$ в любой точке касания.

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. Найти частные решения дифференциальных уравнений:
   a) $y''+y'-6y=0,$ *если* $y=3, y'=1$ *при* $x=0$
   b) $y''-6y'+9=0,$ *если* $y=1, y'=1$ *при* $x=0$
2. $\frac{d^2s}{dt^2}=12t-2$ *если* $S=4,\ S'=2$ *при* $t=1$

Вариант 2

1. Найти частные решения дифференциальных уравнений:
   a) $y''-2y'-8y=0,$ *если* $y=4, y'=10$ *при* $x=0$
   b) $y''-8y'+16=0,$ *если* $y=2,\ y'=9$ *при* $x=0$
2. $\frac{d^2s}{dt^2}=12t-2$ *если* $S=1,\ S'=4$ *при* $t=1$

Самостоятельная работа 4

Вариант 1

Решить следующие дифференциальные уравнения первого и второго порядка

1. $y' = \frac{1}{\cos^2 x} + x^4$.
2. $y' = -6y$.
3. $y' = \frac{x-1}{y^2}$.

4. $y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$.
5. $y' - 3y + 5 = 0$.
6. $y'' - 7y' + 10y = 0$.
7. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Вариант 2

Решить следующие дифференциальные уравнения первого и второго порядка.

1. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - x^7$.
2. $y' = 8y$.
3. $y' = \frac{2x}{y^2}$.
4. $y' = \frac{y}{1+x^2}$.
5. $y' + 8y - 3 = 0$.
6. $y'' + 8y' + 16y = 0$.
7. $y'' - y' - 12y = 0$.

Практическое занятие № 31
Решение дифференциальных уравнений I порядка

Цель: Реализация дифференцированного подхода к обучению; обеспечить повторение основных понятий

Задания

1.Проверить, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений указанные функции (C – постоянная)

1. $x^2y' - 2xy = 3; y = 3x^2 - \frac{1}{x}$;
2. $dy + ytgxdx = 0; y = 2\cos x$;
3. $y' - yctgx = ctgx; y = C\sin x - 1$;
4. $xy^e + 2y = e^{-x^3}; y = 3 - e^{-x^3}$;
5. $dy = 3x2ydx; y = Ce^{x^3}$;
6. $xy' = y - 1; y = Cx + 1$;
7. $y'ctg + y = 2; y = \cos x + 2$;
8. $y'x^2 = 3 + 2xy; y = -\frac{1}{x} + 3x^2 + C$;
9. $y = xy + (y')^2; y = 2x + 4$;
10. $\frac{y}{x} = 3x - y'; y = \frac{C}{x} + x^2$;

2. Решить дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными.

1. $\frac{dy}{\sqrt{y}} - \frac{dx}{x} = 0$;
2. $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$;
3. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-1}$;
6. $tgtdt + \frac{ds}{s} = 0$;
7. $\sqrt{y}dy = 3\sqrt{x}dx$;
8. $dy = (x^2 - 1)dx$;

4. $e^x dx = ydy;$

5. $2ydy = (1-3x^2)dx;$

9. $\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x-1};$

10. $\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \frac{dx}{1+x^2};$

3. Найти частное решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

1. $ydx = ctgxdy = 0; y(\frac{\pi}{3}) = -1;$
2. $y' + \frac{tgx}{ctgy} = 0; y = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3};$
3. $(1+x^2)dy - 2xydx = 0; y = 4; x = -1;$
4. $(1+x^3)dy = 3x^2 ydx; y = 2; x = 0;$
5. $(1+y^2)dx = xydy; y = 1; x = 2;$
6. $2ydx = (1+x)dy; y(1) = 4;$
7. $\frac{dy}{\sqrt{y}} + dx = \frac{dx}{\sqrt{x}}; y = 1; x = 0;$
8. $(2x-1)dy = (y+1)dx; y(5) = 0;$
9. $(1-x^2)dy + xydx = 0; y = 4; x = 0;$
10. $(1+x^2)dy - 2x(y+3)dx = 0; y(0) = -1;$

4. Решить линейное дифференциальное уравнение 1 порядка

1. $y' + 3y = e^{2x}$

2. $y' - y = xe^x$

3. $y' - 2y = x$

4. $xy' = y + 2x^3$

5. $x^2 y' + xy + 2 = 0$

6. $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^2}$

7. $y' + \frac{3y}{x} = x$

8. $y' - \frac{y}{x} = -x$

9. $y' - \frac{y}{x} = -1$

10. $y' - y = \frac{e^x}{x}$

Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением.
2. Что называется решением дифференциального уравнения.
3. Общее решение дифференциального уравнения.
4. Написать общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
5. Задача Коши.
6. Каков общий вид однородного дифференциального уравнения 1-го порядка?
7. Алгоритм решения однородного дифференциального уравнения первого порядка.

Практическое занятие № 32
Решение дифференциальных уравнений II порядка

Цель: Проверить навыки решения дифференциальных уравнений II порядка

Задания

Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $a) y''+4y=0; b) y''-10y'+25y=0; c) y''+3y'+2y=0.$
2. $a) y''-y'-2y=0; b) y''+9y=0; c) y''+4y'+4y=0;$
3. $a) y''-4y=0; b) y''-4y'+13y=0; c) y''-3y'+2y=0;$
4. $a) y''-5y'+6y=0; b) y''-+3y'=0; c) y''+2y'+5y=0;$
5. $a) y''-2y'+10y=0; b) y''+y'-2y=0; c) y''-2y'=0;$
6. $a) y''-4y=0; b) y''+2y'+17y=0; c) y''-y'-12y=0;$
7. $a) y''+y'-6y=0; b) y''+9y'=0; c) y''-4y'+20y=0;$
8. $a) y''-49y=0; b) y''-4y'+5y=0; c) y''+2y'-3y=0;$
9. $a) y''+7y'=0; b) y''-5y'+4y=0; c) y''+16y=0;$
10. $a) y''-6y'+8y=0; b) y''+4y'+5y=0; c) y''+5y'=0;$
11. $a) 4y''-8y'+3y=0; b) y''-3y'=0; c) y''-2y'+10y=0;$
12. $a) y''+4y'+20y=0; b) y''-3y'-10y=0; c) y''-16y=0;$
13. $a) 9y''+6y'+y=0; b) y''-4y'-21y=0; c) y''+y=0;$
14. $a) 2y''+3y'+y=0; b) y''+4y'+8y=0; c) y''-6y'+9y=0;$
15. $a) y''-10y'+21y=0; b) y''-2y'+2y=0; c) y''+4y=0;$
16. $a) y''+6y'=0; b) y''+10y'+29y=0; c) y''-8y'+7y=0;$
17. $a) y''+25y=0; b) y''+6y'+9y=0; c) y''+2y'+2y=0;$
18. $a) y''-3y'=0; b) y''-7y'-8y=0; c) y''+4y'+13y=0;$
19. $a) y''-3y'-4y=0; b) y''+6y'+13y=0; c) y''+2y'=0;$
20. $a) y''+25y'=0; b) y''-10y'+16y=0; c) y''-8y'z=16y=0;$
21. $a) y''-3y'-18y=0; b) y''-6y'=0; c) y''+2y'+5y=0;$
22. $a) y''-6y'+13y=0; b) y''-2y'-15y=0; c) y''-8y'=0;$
23. $a) y''+2y'+y=0; b) y''+6y'+25y=0; c) y''-4y'=0;$
24. $a) y''+10y'=0; b) y''-6y'+8y=0; c) 4y''+4y'+y=0;$
25. $a) y''+5y=0; b) 9y''-6y'+y=0; c) y''+6y'+8y=0;$
26. $a) y''+6y'+10y=0; b) y''-4y'+4y=0; c) y''-5y'+4y=0;$
27. $a) y''-y=0; b) 4y''+8y'-5y=0; c) y''-6y'+10y=0;$
28. $a) y''+8y'+25y=0; b) y''+9y'=0; c) 9y''+3y'-2y=0;$
29. $a) 6y''+7y'-3y=0; b) y''+16y=0; c) 4y''-4y'+y=0;$
30. $a) 9y''-6y'+y=0; b) y''+12y'+37y=0; c) y''-2y'=0;$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Что называют порядком дифференциального уравнения?
3. Дайте определение общего решения дифференциального уравнения.
4. Что называют условиями Коши?
5. Что называют задачей Коши?
6. Дайте определение частного решения дифференциального уравнения.
7. Какие уравнения называются дифференциальными уравнениями II порядка?
8. Понятие характеристического уравнения.
9. Общее решение уравнения характеристического уравнения.

Тема. 4 Комплексные числа (У5, З3)

Устный опрос 1

1. Что такое комплексное число: действительная часть числа, мнимая часть числа?
2. Что такое мнимая единица?
3. Какие числа называются сопряженными?
4. Как представить комплексное число графически?
5. Что такое модуль числа?
6. Что такое аргумент числа?
7. Сколько может быть модулей и аргументов у комплексного числа?
8. Как найти аргумент числа?
9. Как найти сумму, разность, произведение, частное комплексных чисел?

Устный опрос 2

1. Что такое тригонометрическая форма записи комплексного числа?
2. Как перевести число в тригонометрическую форму?
3. Как найти произведение, частное чисел в тригонометрической форме?
4. Как найти возвести число в тригонометрической форме в целую степень?
5. Как найти корень n-ной степени из числа в тригонометрической форме?
6. Формула Эйлера
7. Как представить комплексное число в показательной форме?
8. Как связаны тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел?
9. Как найти произведение, частное чисел в показательной форме?
10. Как найти возвести число в показательной форме в целую степень?
11. Как найти корень n-ной степени из числа в показательной форме?

Самостоятельная работа №1

Вариант 1

1. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

а) $\dfrac{\sqrt{3}-i^{17}}{i^{12}}$; б) $\dfrac{(1+i)^8}{(1-i)^6}$.

2. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

а) $3\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2$; б) $\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}\,e^{i\pi/3}}$.

Вариант 2

1. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

а) $\dfrac{2i^5}{1+i^{11}}$; б) $\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)^4}$.

2. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

а) $7\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^3$; б) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}\,e^{i\pi/2}}$.

Вариант 3

1. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

а) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{(i-1)^3}{i^{12}+i^{31}}$.

2. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

а) $\dfrac{24(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ)}{3(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)}$; б) $\dfrac{e^{-i\pi/3}}{(-\sqrt{3}+i)^5}$.

Вариант 4

1. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

а) $\dfrac{5+i}{2+i\cdot 3}$; б) $\dfrac{3i^{15}+(i\sqrt{3})^2}{i^9}$.

2. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

а) $2\left(\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right)^2$; б) $\dfrac{(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})^6}{12e^{-i\pi/2}}$.

Вариант 5

1. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

а) $2\left(\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right)^2$; б) $\dfrac{(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})^6}{12e^{-i\pi/2}}$.

2. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

а) $4\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^{10}$; б) $\dfrac{(1+i)^{15}}{2^7\cdot e^{i\pi/2}}$.

Вариант 6

1. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

а) $\dfrac{1-2i}{1+3i}$; б) $\dfrac{(i^9-1)(i^9+1)}{1_i}$.

2. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:
3.

а) $3\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)^4$; б) $\dfrac{e^{i\pi/3}\cdot i}{(\sqrt{3}-i)^4}$.

Самостоятельная работа №2

Вариант 1

1. Составить квадратное уравнение по его корням $x_1=5-3i,\quad x_2=5+3i$
2. Выполнить действия:

$a)(2+i)+(-3-i)-(4-3i)$ $\quad b)\dfrac{5+3i}{5-3i}$

3. Построить слагаемые $z_1=-2+i,\quad z_2=2-3i$ и их сумму.
4. Выполнить действия:

a) $\left(\cos 12^\circ + i\sin 12^\circ\right)^{45}$ *b*) $\left(2e^{-\frac{15\pi}{8}}\right)^8$

5. Выполнить действия и записать результат в показательной форме: $z = \dfrac{1-i}{e^{-\frac{3\pi}{4}i}}$

Вариант 2

1. Решить квадратное уравнение $x^2 - 6x + 34 = 0$
2. Выполнить действия:
   $(3+5i)\cdot(3-5i)\cdot(-2+i)$
3. Построить комплексные числа $z_1 = 2-3i$, $z_2 = 1+2i$, а также им сопряженные и противоположные.
4. Выполнить действия:
   a) $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}$ *b*) $\left(2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^{-6}$
5. Выполнить действия и записать результат в показательной форме: $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}}$

Практическая работа № 33
Действия над комплексными числами

Цель: Проверить умения выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме

Задания

1. Даны комплексные числа вычислить сумму $z = z_1 + z_2$ аналитически и графически, найти модуль и аргумент z, а так же $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$

1. $z_1 = 5-i$; $z_2 = 1+3i$
2. $z_1 = 3-4i$; $z_2 = 1+i$
3. $z_1 = 1-5i$; $z_2 = 1+4i$
4. $z_1 = 1+3i$; $z_2 = 7-i$
5. $z_1 = 1-i$; $z_2 = 7+3i$
6. $z_1 = 1-i$; $z_2 = 5-4i$
7. $z_1 = 3+4i$; $z_2 = -2+i$
8. $z_1 = -i$; $z_2 = 7+4i$
9. $z_1 = 6-5i$; $z_2 = 1+i$
10. $z_1 = -1+5i$; $z_2 = 2-5i$
11. $z_1 = 5-7i$; $z_2 = 1-3i$
12. $z_1 = -3-2i$; $z_2 = -1+7i$
13. $z_1 = 5+2i$; $z_2 = 2-i$
14. $z_1 = 1+5i$; $z_2 = 2-3i$
15. $z_1 = 1-4i$; $z_2 = 1+2i$
16. $z_1 = 5+i$; $z_2 = 1-2i$
17. $z_1 = 3+i$; $z_2 = 5-2i$
18. $z_1 = 1-5i$; $z_2 = 1+3i$
19. $z_1 = 5-i$; $z_2 = 1+3i$
20. $z_1 = 1+3i$; $z_2 = -2+5i$
21. $z_1 = 3+4i$; $z_2 = -2+i$
22. $z_1 = 5-2i$; $z_2 = -2+i$
23. $z_1 = 7-2i$; $z_2 = 5+3i$
24. $z_1 = 7-3i$; $z_2 = -1+4i$
25. $z_1 = -2+3i$; $z_2 = 5-4i$
26. $z_1 = -3+2i$; $z_2 = 6+5i$
27. $z_1 = -1+7i$; $z_2 = 4-5i$
28. $z_1 = 4+5i$; $z_2 = 1-2i$
29. $z_1 = -1+3i$; $z_2 = 6-5i$
30. $z_1 = -3-2i$; $z_2 = 4+3i$

2. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме

1) $\dfrac{1+i}{1-2i} - \left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i\right)$;

2) $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$;

3) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}+i^{17}$;

4) $\frac{(1-2i)(1+2i)}{2+i}-i^{12}$;

5) $\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i}-(1+i\sqrt{3})$;

6) $\frac{(-2+i)^2}{1+3i}-(0{,}1-0{,}3i)$;

7) $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{i(\sqrt{3}-i)}$;

8) $\frac{(1-3i)(1+3i)}{-3-i}-2i^{19}$;

9) $\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2i^5}$;

10) $\frac{(4-i)^2}{i^8}-8(2-i^{13})$;

3. Выполнить действия над комплексными числами:

1) z_1+z_2; 2) z_1-z_2; 3) z_1*z_2; 4) $\frac{z_1}{z_2}$;

1. $z_1=1+i,\ z_2=-\sqrt{3}+i$;

2. $z_1=1-i,\ z_2=-\sqrt{3}-i$;

3. $z_1=-1+i,\ z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

4. $z_1=-1-i,\ z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

5. $z_1=1+\sqrt{3}i,\ z_2=2-2i$;

6. $z_1=1-\sqrt{3}i,\ z_2=2+2i$;

7. $z_1=-1+\sqrt{3}i,\ z_2=-2-2i$;

8. $z_1=-1-\sqrt{3}i,\ z_2=-2+2i$;

9. $z_1=\sqrt{3}+i,\ z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

10. $z_1=\sqrt{3}-i,\ z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

Контрольные вопросы

1. Что такое комплексное число: действительная часть числа, мнимая часть числа?
2. Что такое мнимая единица?
3. Какие числа называются сопряженными?
4. Как представить комплексное число графически?
5. Что такое модуль числа?
6. Что такое аргумент числа?
7. Сколько может быть модулей и аргументов у комплексного числа?
8. Как найти аргумент числа?
9. Как найти сумму, разность, произведение, частное комплексных чисел?

Практическая работа № 34
Перевод из одной формы комплексного числа в другую

Цель. Обобщить и проверить знания и навыки по теме «Комплексные числа»

Задания

1. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме, результат записать в тригонометрической, алгебраической и показательной форме

1. $\dfrac{i-1}{1+i}$
2. $\left(\dfrac{1-i}{-2-2i}\right)^{-6}$
3. $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{6}$
4. $\left(\dfrac{0{,}5-0{,}5\sqrt{3}i}{0{,}5\sqrt{3}-0{,}5i}\right)^{4}$
5. $\left(2+\sqrt{12}i\right)^{5}$
6. $\sqrt[3]{-1+i}$
7. $\left(\left(\sqrt{3}-i\right)\left(-1+i\right)\right)^{4}$
8. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$
9. $\left(\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^{3}$
10. $\left(-3-\sqrt{3}i\right)^{3}$

2. Записать комплексное число в тригонометрической и алгебраической форме

1. $14e^{2\pi i/3}$;
2. $2e^{\pi i/6}$;
3. $(2/3)e^{-5\pi i/3}$;
4. $3e^{\pi i/3}$;
5. $e^{-5\pi i/6}$;
6. $4e^{-\pi i/4}$;
7. $5e^{-7\pi i/6}$;
8. $(2/5)e^{5\pi i/4}$;
9. $8e^{7\pi i/6}$;
10. $2{,}2e^{-3\pi i/4}$;

3. Выполнить действия. Результат записать во всех формах.

1. $\dfrac{(5+3i)(5+3i^{15})}{\sqrt{2}(\cos 225^{\circ}+i\sin 225^{\circ})}$;
2. $\dfrac{(3+2i)^{2}(2-3i^{0})}{1+2i^{31}}$;
3. $\dfrac{(2+i)^{3}}{2i(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))}$;
4. $((1-i\sqrt{3})/2)^{6}$;
5. $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$;
6. $((-\sqrt{3}+i)/2)^{60}$;
7. $(2/(1-i\sqrt{3}))$;
8. $((\sqrt{3}+i)/2)^{24}$;
9. $\sqrt{-8-8\sqrt{3}i}$;
10. $\sqrt{7-4i\sqrt{2}}$;

4. Выполнить действия, используя тригонометрическую форму:

1. $\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}i\right)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{6}+\dfrac{i\sqrt{6}}{6}\right)$;
2. $(1+i\sqrt{3})(-2-2i\sqrt{3})$;
6. $3\left[\cos(-\dfrac{\pi}{8})+i\sin(-\dfrac{\pi}{8})\right]+(3+\sqrt{3}i)$;
7. $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$;

3. $(1+i)(3+3i\sqrt{3})$;

4. $(6+2i\sqrt{3})(-3-3i)$;

5. $(5+5i)(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$;

8. $\dfrac{i^6+i^5}{\sqrt{2}e^{\pi i/3}}$;

9. $\dfrac{\frac{-3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i}{4-4\sqrt{3}i}$;

10. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-3\pi i/4}$

5. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

1) $\sqrt[3]{z_1}$; 2) z_2^5;

1. $z_1=1+i,\ z_2=-\sqrt{3}+i$;
2. $z_1=1-i,\ z_2=-\sqrt{3}-i$;
3. $z_1=-1+i,\ z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$;
4. $z_1=-1-i,\ z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$;
5. $z_1=1+\sqrt{3}i,\ z_2=2-2i$;
6. $z_1=1-\sqrt{3}i,\ z_2=2+2i$;
7. $z_1=-1+\sqrt{3}i,\ z_2=-2-2i$;
8. $z_1=-1-\sqrt{3}i,\ z_2=-2+2i$;
9. $z_1=\sqrt{3}+i,\ z_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$;
10. $z_1=\sqrt{3}-i,\ z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$;

Контрольные вопросы

1. Что такое тригонометрическая форма записи комплексного числа?
2. Как перевести число в тригонометрическую форму?
3. Как найти произведение, частное чисел в тригонометрической форме?
4. Как найти возвести число в тригонометрической форме в целую степень?
5. Как найти корень n-ной степени из числа в тригонометрической форме?
6. Формула Эйлера
7. Как представить комплексное число в показательной форме?
8. Как связаны тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел?
9. Как найти произведение, частное чисел в показательной форме?
10. Как найти возвести число в показательной форме в целую степень?
11. Как найти корень n-ной степени из числа в показательной форме?

Контрольная работа № 2 за 2 семестр

Вариант 1

1. Найти производные функций
   а) заданной неявно следующим уравнением: $e^{xy}-x^3-y^3=3$
   б) логарифмическим дифференцированием: $y=(\sin x)^{3x}$
2. Найти интеграл от рациональной дроби: $\int\frac{3x+8}{(x-2)(x+5)}dx$
3. Решить дифференциальное уравнение:
   а) $(y-1)^2dx+(1-x)^3dy=0$; б) $\dfrac{dy}{dx}+y\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{\cos x}{x+1}$
4. Исследовать на сходимость ряд по признаку Даламбера:
   $1+\dfrac{3}{1}+\dfrac{3^2}{1\cdot 2}+\dfrac{3^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{3^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$

Вариант 2

1. Найти производные функций
   а) заданной неявно следующим уравнением: $y = \cos(x + y)$
   б) логарифмическим дифференцированием: $y = (\cos 2x)^{\sin x}$
2. Найти интеграл от рациональной дроби: $\int \frac{7x+12}{(x-1)(3x+1)}dx$
3. Решить дифференциальное уравнение:
   а) $x\sqrt{9-y^2}dx - y(4+x^2)dy = 0;$ б) $\frac{dy}{dx} + y \cdot tgx = \frac{1}{\cos x}$
4. Исследовать на сходимость ряд по признаку Даламбера:
$\frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{6}{125} + \frac{8}{625} + \ldots$

Вариант 3

1. Найти производные функций
   а) заданной неявно следующим уравнением: $x^3 - y^3 = x^2y^2$
   б) логарифмическим дифференцированием: $y = (\sin 2x)^{\cos x}$
2. Найти интеграл от рациональной дроби: $\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2}dx$
3. Решить дифференциальное уравнение:
   а) $3x\sqrt[3]{y}dx + (1-x^2)dy = 0;$ б) $\frac{dy}{dx} + 2xy = 2xe^{x^2}$
4.Исследовать на сходимость ряд по признаку Даламбера:

$\frac{3}{1^2} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{3^2} + \frac{3^4}{4^2} + \ldots$

Вариант 4

1. Найти производные функций
   а) заданной неявно следующим уравнением: $xy = ctgy$
   б) логарифмическим дифференцированием: $y = x^{\sin 3x}$
2. Найти интеграл от рациональной дроби: $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$
3. Решить дифференциальное уравнение:
   а) $(x^2+1)dy - xydx = 0;$ б) $\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$
4.Исследовать на сходимость ряд по признаку Даламбера:
$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$

Вариант 5

1. Найти производные функций
   а) заданной неявно следующим уравнением: $x = arctg(x + y)$
   б) логарифмическим дифференцированием: $y = (\cos x)^{5x}$
2. Найти интеграл от рациональной дроби: $\int \frac{5-4x}{(x+1)(x-2)}dx$
3.Решить дифференциальное уравнение:
   а) $ydx - (4+x^2)\ln y \cdot dy = 0;$ б) $\frac{dy}{dx} + y\frac{2}{x} = \frac{1}{x^2}$
4.Исследовать на сходимость ряд по признаку Даламбера:
$\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{9} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{27} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{81} + \ldots$

Вариант 6

1. Найти производные функций
   а) заданной неявно следующим уравнением: $x^3 + y^3 = 3y$
   б) логарифмическим дифференцированием: $y = x^{x+1}$

2. Найти интеграл от рациональной дроби: $\int \frac{2x^2-2x-1}{x^2-x^3}\,dx$

3.Решить дифференциальное уравнение:

а) $\sqrt{y}dx + x^2dy = 0;$ б) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \cos x$

4.Исследовать на сходимость ряд по признаку Даламбера:

$$\frac{5}{1^5} + \frac{25}{2^5} + \frac{125}{3^5} + \frac{625}{4^5} + \ldots$$

8. Контрольно-оценочные материалы для итоговой аттестации по учебной дисциплине

I. ПАСПОРТ

Назначение:

КОМ предназначен для контроля и оценки результатов освоения учебной дисциплины *элементы высшей математики* по специальности СПО *09.02.01 Компьютерные системы и комплексы*

Умения

У 1 - выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;

У 2 - применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

У 3 - решать дифференциальные уравнения.

Знания

З1 -основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;

З2 - основы дифференциального и интегрального исчисления;

II. ЗАДАНИЕ ДЛЯ ЭКЗАМЕНУЮЩЕГОСЯ

Пример зачетного билета:

---

1. Определители второго и третьего порядка, их вычисление и свойства.
2. Даны вершины треугольника АВС: А (-2, 4), В (3, 1), С (10, 7).
Найти: а) уравнение стороны АВ; б) уравнение высоты СН;
3. Исследовать на сходимость по радикальному признаку Коши $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$

Литература для обучающихся:

При ответе на билет можно пользоваться тетрадью для самостоятельной подготовки к экзамену, справочными таблицами: «Значениям синусов, косинусов и тангенсов табличных углов», «Таблица производных и первообразных». Формулами: «Основные тригонометрические формулы», «Разложение основных функций в степенные ряды», «Эквивалентные бесконечно малые функции»

III. ПАКЕТ ЭКЗАМЕНАТОРА

III а. УСЛОВИЯ

Инструкция для обучающихся

Дифференциальный зачет проводится в устной форме по билетам.

Первая группа – 6 человек

Билет состоит из трех вопросов: первый – теоретический вопрос, второй и третий – практическое задание.

Внимательно прочитайте задания к билету. Кратко письменно изложите теоретический вопрос и запишите решение практических заданий.

Время выполнения задания – 30 мин.

Количество вариантов заданий– *20 билетов*

Эталон ответа:

1. Определители второго и третьего порядка, их вычисление и свойства.

Матрицей размера 2 х 2 называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы из 2 строк и 2 столбцов. Обозначается

Числа, составляющие $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ эту матрицу, называются ее элементами и обозначаются буквой с двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки, а второй - номер столбца, в которых стоит данное число.

Определителем (или детерминантом) второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число $a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$.

Определитель обозначают символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

По определению, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$.

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называются элементами определителя.

Свойства определителя второго порядка

1) Определитель не изменится, если все его строки заменить (транспортировать) соответствующими столбцами (равномерность строк и столбцов).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4-(-2)\cdot 5 = 22$$

2) При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

3) Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & к\,a_{12} \\ a_{21} & к\,a_{22} \end{vmatrix} = \text{к} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = -2\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -2\ (3\cdot 3-7\cdot 1) = -4$$

4) Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)-3\cdot(-2) = -6+6 = 0$$

5) Если все элементы двух строк или столбцов определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} к\,a_{11} & к\,a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = к\cdot a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot к\cdot a_{12} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4-6\cdot 2 = 0$$

6) Если все элементы строки или столбца определителя равны нулю, то определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

7)Если к одной строке (столбцу) поэлементно прибавить другую строку (столбец), умноженную на одно и то же число, то новый определитель совпадает с исходным, то есть не изменится

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\kappa a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+\kappa a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

8)Треугольный определитель, у которого все элементы, лежащие выше (или ниже) главной диагонали, - нули, равен произведению элементов главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Определители третьего порядка, их вычисление

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - квадратная матрица размера 3 х 3

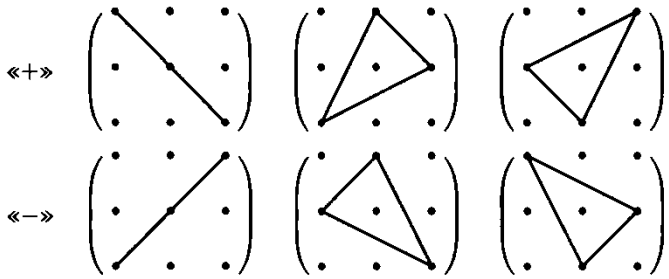
(3 строки, 3 столбца), то соответствующим ей определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

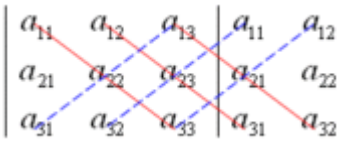
Числа a_{11}, a_{12}, ... , a_{33} называются элементами определителя. Формула дает разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки и сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителей второго порядка.

Определители третьего порядка обладают всеми свойствами определителей второго порядка.

Правило «треугольников» (правило Саррюса)



Еще один способ вычисления определителя



2. Даны вершины треугольника ABC: A (-2, 4), B (3, 1), C (10, 7).Найти: а) уравнение стороны AB; б) уравнение высоты CH;

Решение. а) Для составления уравнения стороны AB используем уравнение прямой, проходящей через две точки.

$$(AB):\ \frac{x-x_B}{x_A-x_B}=\frac{y-y_B}{y_A-y_B}\quad (AB):\ \frac{x-3}{-2-3}=\frac{y-1}{4-1}\quad (AB):\ \frac{x-3}{-5}=\frac{y-1}{3}$$

$$3(x-3)=-5(y-1)$$

$$3x-9=-5y+5 \qquad \text{или} \qquad 3x+5y-14=0$$

б) $(CH)\perp(AB)$, $k_{CH}=-\dfrac{1}{k_{AB}}$

Разрешим уравнение AB относительно y.

$5y = -3x + 14 = 0,\ y = -\frac{3}{5}x + \frac{14}{5} = 0,\ k_{AB} = -\frac{3}{5},\quad k_{CH} = \frac{5}{3}$

$(CH):\ y - y_C = k_{CH}(x - x_c)$

$y - 7 = \frac{5}{3}(x - 10),\qquad 3y - 21 = 5x - 50,\qquad 5x - 3y - 29 = 0$

3. Исследовать на сходимость по радикальному признаку Коши $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

Решение: Найдем $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1,$ следовательно, данный ряд является сходящимся.

III б. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

Оценка «отлично» ставится при полном ответе на билет. Возможны одна - две неточности при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, которые студент легко исправил по замечанию преподавателя.

Оценка «хорошо» ответ удовлетворяет в основном требованиям на оценку «5», но при этом допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, легко исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса, допущены ошибки в определении понятий; ученик не справился с применением теории в новой ситуации при выполнении практического задания.

Оценка «не удовлетворительно» ставится, если не раскрыто основное содержание учебного материала; допущены ошибки в определении понятий, при использовании математической терминологии, в рисунках, чертежах или графиках, в выкладках, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов преподавателя.

К грубым ошибкам относятся ошибки, которые обнаруживают незнание учащимися формул, правил, основных свойств, теорем и неумение их применять; незнание приемов решения задач, рассматриваемых в учебниках, а также вычислительные ошибки, если они не являются опиской.

К негрубым ошибкам относятся: потеря корня или сохранение в ответе постороннего корня; отбрасывание без объяснений одного из них и равнозначные им.

К недочетам относятся: нерациональное решение, описки, недостаточность или отсутствие пояснений, обоснований в решениях.

9. Список использованной литературы

1. Дорофеева А.В. Высшая математика для гуманитарных направлений. Сборник задач: Учебно-практическое пособие / А.В. Дорофеева. — Москва: Юрайт, 2020. — 175 с.
2. Ильин В.А. Высшая математика: Учебник / В.А. Ильин, А.В. Куркина. — Москва: Проспект, 2020. — 608 с.
3. Клюшин В.Л. Высшая математика для экономистов: задачи, тесты, упражнения: Учебное пособие для бакалавров / В.Л. Клюшин. — Мосвка: Юрайт, 2020. — 165 с.
4. Крицков Л.В. Высшая математика в вопросах и ответах: Учебное пособие / Л.В. Крицков; Под ред. В.А. Ильин. - Мосвка: Проспект, 2022.-176 с.
5. Лурье И.Г. Высшая математика: Практикум / И.Г. Лурье, Т.П. Фунтикова. — Москва: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2020. — 160 с.
6. Львовский С.М. Основы математического анализа: Учебник для вузов / С.М. Львовский. - Москва: Высшая школа экономики, 2024. - 512 с.
7. Полькина Е.А. Сборник заданий по высшей математике с образцами решений: Учебно-методическое пособие / Е.А. Полькина. — Москва: ИНФРА-М, 2020. — 320 с.
8. Сотников В.Н. Высшая математика для экономистов: Учебник для бакалавров / А.М. Попов, В.Н. Сотников; Под ред. проф. А.М. Попов. — Москва: Юрайт, 2020. — 564 с.
9. Шипачев В.С. Высшая математика. Полный курс: Учебник для вузов: В 2 т. / В.С. Шипачев; Под ред. А.Н. Тихонов. — Москва: Юрайт, 2020. — Т. 1: 248 с., Т. 2: 359 с.
10. Ячменёв Л.Т. Высшая математика: Учебник / Л.Т. Ячменёв. — Москва: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М, 2020. — 752 с.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
"ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ"

Составитель
Адамова Марианна Ивановна

Якутск, 2026